

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA

RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

Tereza Raquel Couto de Lima¹

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-MG

raquel.bq@hotmail.com

Dimas Felipe de Miranda²

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-MG

dimasfm48@yahoo.com.br

RESUMO: Este artigo relata uma experiência que teve como objetivo principal verificar e identificar estratégias utilizadas pelos estudantes durante uma aula com investigação matemática, envolvendo múltiplos e divisores de números naturais. O trabalho foi desenvolvido junto a duas classes do 2ª série do ensino médio de duas escolas públicas, uma estadual e outra federal, no interior do estado de Minas Gerais. Foram planejadas dez questões acerca de um problema de investigação. O material da análise é constituído de gravações em áudio e vídeo, fotos e registros escritos pelos alunos. O trabalho desenvolvido mostra que o ambiente de investigação matemática é muito rico e desafiador, tornando a aprendizagem mais significativa e eficaz.

Palavras-chave: Investigação matemática, resolução de problemas, estratégia de ensino

1. Introdução

Ao procurar esclarecer o que é investigação matemática pode-se partir essencialmente do conceito dado por Ernest (1996) que descreve este processo como: procura, ação de investigar, exame sistemático e inquirição. No entanto, o objetivo desta atividade matemática se inicia a partir de um problema ou questão matemática e se altera durante o processo, durante a busca de solução, quando a pessoa que conduz a investigação formula novas questões que exigem exploração. Nesse tipo de atividade o que importa é o caminho usado para se chegar ao resultado e não o resultado por si só.

¹ Professora de matemática da educação básica da rede pública do estado de Minas Gerais. Mestranda do 5º Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

² Doutor em Tratamento da Informação Espacial pela PUC Minas. Professor no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

Durante uma investigação matemática o aluno desenvolve atividades muito próximas às de um matemático profissional. Dessa forma, essa atividade exige que os alunos formulem boas questões e conhecimentos que permitam aos mesmos tomar decisões.

Diversos autores apontam para a importância do trabalho com investigação matemática na sala de aula. No entanto, este tema gera certo receio em diversos professores que encontram dificuldade em propor essas tarefas.

Este trabalho se insere no campo da pesquisa sobre atividades investigativas e busca responder o que são atividades de investigação matemática e quais competências que essa prática pode desenvolver.

O trabalho exigiu uma abordagem inquiridora por parte dos alunos. Os alunos deveriam, inicialmente, encontrar uma solução para um problema que não possui um algoritmo acessível para sua resolução. A busca da solução exigiu que o próprio aluno construísse seu conhecimento; ele deveria agir como um profissional quando se depara com um problema ainda não solucionado por outros matemáticos.

2. Referencial Teórico

Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

(Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p. 9)

A investigação matemática é uma forma de tornar o estudante um indivíduo capaz de construir o próprio conhecimento, tornando-o autônomo, já que esta atividade trabalha e desenvolve processos matemáticos. A atividade investigativa, segundo Silva et al (1999), permite que o aluno desenvolva habilidades como: intuir, experimentar, explorar, abstrair, buscar padrões, conjecturar, formular, testar, generalizar e demonstrar. Ao realizar atividades de investigação, os alunos adquirem entusiasmo pela matemática.

Uma investigação matemática, segundo Ponte et al, normalmente se desenvolve através de um problema. Na tentativa de resolver o problema podemos fazer descobertas que se revelam tão importantes quanto, ou mais, que a solução do problema proposto. Mesmo quando não conseguimos resolver o problema, construímos muito conhecimento durante a busca de uma solução. Investigar é aprender a fazer matemática. Só assim se conhece e aprende a verdadeira matemática. Tornar-se detetive matemático é investigar acerca de mistérios que nos afligem, é buscar a compreensão da natureza matemática, é errar e aprender com os erros.

Podemos prever como uma atividade investigativa irá começar, mas não há como saber qual será o percurso de todo o trabalho percorrido pelos inquiridores. O professor pode fazer intervenções quando essas se fizerem necessárias, mas não se pode saber como os alunos irão reagir a partir deste momento. Cada aula de investigação matemática é única e imprevisível.

Segundo Ponte et al (2003) a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos: primeiro, ocorre a exploração e são formuladas questões. No segundo momento, ocorre a organização de dados e a formulação de conjecturas. Durante o terceiro momento se dá a realização de testes e o refinamento das conjecturas e no quarto momento, ocorre a justificação das conjecturas, sua demonstração e a avaliação do raciocínio. Durante esses quatro momentos pode acontecer a interação entre os interessados em resolver a questão. Essa interação, no entanto, torna-se obrigatória no final, para que ocorra a divulgação dos resultados.

No final de todo o trabalho investigativo é importante a interação de toda a turma para que haja um balanço de toda a atividade realizada, das descobertas e da solução do problema inicial. Neste momento, também é muito importante que os alunos, juntamente com o professor, reflitam sobre toda a atividade realizada. Os alunos, desta forma, desenvolvem a capacidade de comunicação.

O envolvimento ativo dos alunos é essencial para que haja a efetiva aprendizagem da matemática. Ao investigar, o aluno se torna um detetive matemático. Mas para que isto ocorra é necessário deixá-lo trabalhar de forma autônoma.

Ernest (1996) defende que a investigação matemática deve ser utilizada como método de ensino. A utilização dessa atividade é uma perspectiva onde há um ensino mais dinâmico, que ocorre quando o próprio faz descobertas acerca de temas que lhes interessa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais atribuem uma significativa importância à utilização de atividades investigativas. No entanto, segundo Ernest, a matemática do currículo atual é muito rígida. Os professores têm que cumprir um extenso número de conteúdos, não podendo dispor de muito tempo para esse tipo de prática de investigação. No entanto, não existe um currículo que proíba as atividades investigativas. As atividades de inquirição devem estar presentes na sala de aula sempre que possível e necessário.

O ensino de matemática deve acontecer de forma mais dinâmica, estimulando os alunos a pesquisar e encontrar soluções. O aluno deve ser o protagonista na sala de aula.

3. Desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi conduzida durante o primeiro semestre de 2009, junto a duas escolas públicas de ensino regular. O estudo ocorreu em contexto natural de sala de aula e se desenvolveu com dois grupos de alunos: a primeira turma formada por 9 alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola estadual de Minas Gerais e o segunda turma com 38 alunos do 2ª série do ensino médio de uma escola técnica federal.

O objetivo desse trabalho foi o de identificar e verificar as estratégias utilizadas na resolução de uma atividade investigativa, envolvendo múltiplos e divisores de números naturais.

Antes que os alunos chegassem para a aula, a sala de aula foi preparada. A sala foi dividida em dois ambientes, onde posteriormente, cada grupo iria trabalhar. Foi disponibilizado: calculadora, papel, caneta e um material composto de cem cartas numeradas de 1 a 100.

Inicialmente foi proposto o problema:

“Num corredor estão 100 portas dispostas lado a lado como portas de quartos em um hotel, numeradas de 1 a 100, todas fechadas. Por este corredor passa uma pessoa vestindo uma camisa estampando o número 1 e move todas as portas que possuem um número múltiplo de 1, ou seja, abre todas as portas. Entende-se por mover o ato de fechar a porta se ela estiver aberta ou abrir a porta se ela estiver fechada. Em seguida, passa outra pessoa, agora com o número 2 estampado na camisa e move todas as portas múltiplas de 2 e assim segue até a pessoa com a camisa número 100. Depois de 100

peças terem passado pelo corredor de 100 portas, quantas e quais portas ficarão abertas?”³

Inicialmente, a professora verificou se os alunos entenderam bem o problema proposto, mostrando a eles que não se tratava de um simples exercício. Eles deveriam investigar, da forma que achassem melhor, para encontrar a solução. Poderiam usar caneta e papel para desenvolver qualquer cálculo ou algoritmo, calculadora e o material concreto, composto de 100 fichas.

Cada turma foi dividida em dois grupos. Os alunos trabalharam de forma autônoma. Foi adotada uma postura de intervenção mínima.

O segundo momento da pesquisa consistiu na aplicação de um questionário respondido em duplas pela segunda turma e em um trio e três duplas pela primeira turma. O questionário deveria ser respondido por escrito e era constituído de dez questões:

- 1) Se fossem 400 portas, quantas ficariam abertas? E se fossem 500? E 1000?
- 2) O que são números quadrados perfeitos?
- 3) O que são números primos?
- 4) Existe algum primo quadrado perfeito? Tente explicar por quê.
- 5) Existe algum quadrado perfeito par? Se sim, exemplifique.
- 6) O que são números pares?
- 7) Existe algum quadrado perfeito terminado em 2? Explique.
- 8) Em que números terminam os quadrados perfeitos?
- 9) Explique os padrões que você encontrou no problema das portas.
- 10) Quantos quadrados perfeitos existem entre 1000 e 2000?

O questionário exigia que o aluno investigasse novamente. Para responder às questões os alunos deveriam usar as descobertas feitas com o problema das portas. Os estudantes deveriam descobrir e perceber as relações entre os números. Aqueles alunos que ainda não haviam verificado algum padrão para as portas abertas durante a resolução do problema inicial, teriam a oportunidade de identificá-lo durante a resolução do questionário, que induzia o aluno a perceber as regularidades existentes.

Ao término das atividades os resultados foram socializados nas turmas. O trabalho foi registrado com áudio, vídeo e fotos.

³ Adaptado de <<http://www.mensa.org.br/>> Acesso em: 20 de fev. 2009

4. Resultados

A primeira atividade gerou muita inquietação nos alunos. Os alunos ficaram muito entusiasmados, com uma atividade tão diferente. Houve uma busca incansável por padrões. Os alunos trabalharam, durante este primeiro momento, em grupos. Enquanto os alunos exploravam o problema proposto a fim de encontrar uma solução, a professora e pesquisadora observava.

Os estudantes, inicialmente, testaram cada uma das portas de 1 a 10. Após terem verificado a posição final de cada uma das dez portas, procuraram localizar alguma lógica no problema para conseguir achar uma solução para as noventa portas restantes. Perguntavam-se o porquê de somente aquelas portas permanecerem abertas. Após algum tempo começaram a levantar algumas hipóteses, tentando generalizar o problema.

Algumas falas dos alunos na tentativa de encontrar padrões são aqui exemplificadas.

Inicialmente os alunos pensaram que o total de portas abertas poderia ser 30, visto que das dez primeiras portas somente três ficaram abertas. Pensaram que o número de portas seria proporcional nos intervalos.

Rita: “Eu creio que são trinta... pela lógica.”

Maíra: “De um a dez, as que “ficou” aberta foi: a um, a quatro e a nove.”

Rita: “A um, a quatro e a nove...”

Paulo: “Então foram três. Vamos ver se até o vinte vai dar mais três, entendeu?”

Nesta conversa há uma tentativa de descoberta de um padrão para a quantidade de portas abertas. Rita verificou que até a porta dez, ficaram três portas abertas. Junto com o grupo ela tentou verificar se da porta onze até a porta vinte também existem três portas abertas. Ao verificar mais algumas portas, os alunos concluíram que este problema não pode ser resolvido desta forma, já que da décima primeira à vigésima porta, somente uma porta ficou aberta. Começaram a buscar uma nova hipótese. Após muitas tentativas, os alunos decidiram testar todas as portas para verificar o resultado. No final do trabalho encontraram dez portas abertas.

Ainda com o intuito de buscar um padrão, uma aluna observou que nas portas abertas de 1 a 100 havia uma “regra”:

Isabela: “Mas olha só, aqui foi 1, 4 e 9 e aqui ficou 9, 4 e 1... voltou.”

Neste momento Isabela verificou que todas as portas abertas terminavam sempre com a mesma numeração.

Pouco tempo depois Rita já conseguiu generalizar uma solução para o problema:

Rita: “Até o dez, deu múltiplo de um, de dois e de três...”.

Neste momento, a professora fez uma intervenção perguntando que nome recebiam esses números. Neste momento um aluno interrompeu dizendo que entre a primeira e a segunda porta aberta havia duas portas fechadas; entre a segunda e a terceira porta aberta havia quatro portas fechadas; entre a terceira e a quarta porta aberta havia seis portas fechadas e assim sucessivamente:

Joaquim: “Aumenta de 2 em 2, olha aqui, não é não?”

Isabela descobriu que a diferença entre uma porta aberta e a porta aberta que a antecede é sempre um número ímpar e ilustra esta descoberta na figura abaixo:

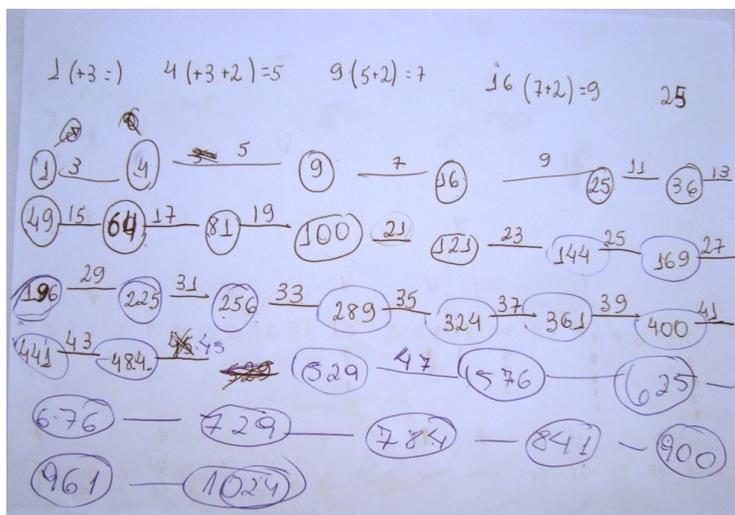


Fig. 01: “Diminuindo qualquer número, porta aberta, da anterior dá um número ímpar.”

Finalmente, depois de algum tempo descobrindo diferentes padrões para o problema Gabriel disse: “Espere aí! Todas as portas abertas têm raiz quadrada exata!” E Natalia completa: “É mesmo. Como é que chamamos estes números? Ah! As portas abertas são com o número quadrado perfeito” E finalmente, os alunos conseguem concluir o trabalho esperado.

Após a resolução do problema, os alunos deveriam responder às dez perguntas do questionário.

Na primeira questão, os alunos deveriam fazer uma ampliação do problema. Como ficaria tecnicamente inviável construir as 400, 500 ou 1000 portas e ainda mais complicado abrir e fechar todas elas, a aplicação de um padrão tornou-se necessária e neste momento, o grupo que conseguiu identificar tal padrão percebeu que é mais

interessante pensar, testar e descobrir o padrão do que construir todas as portas e a seguir aplicar os procedimentos de abrir e fechá-las.

Durante o desenvolvimento do trabalho, os alunos perceberam que as portas que ficam abertas são aquelas que apresentam números quadrados perfeitos. Nesta segunda questão, o que eles deveriam fazer era formalizar tal conceito. Ao tentar explicar o que é um número quadrado perfeito, Pedro concentrou os esforços em construir uma definição para estes números de forma totalmente independente, sem o auxílio da professora ou de livros.

Para saber se existe algum número primo quadrado perfeito, o aluno deveria saber que qualquer número primo tem somente dois divisores, e a partir daí tentar descobrir alguma regularidade. Somente nesta etapa do trabalho os alunos conseguiram perceber o porquê de só as portas com números quadrados perfeitos permanecerem abertas ao final do problema. Só aqui eles observaram mais um padrão: “todos os quadrados perfeitos têm número ímpar de divisores”, e por isso permanecem abertas as portas com estes números. As figuras abaixo ilustram bem esta idéia



Fig. 02: O aluno escreveu todos os números de 1 a 100 representando as portas e foi preenchendo com A, quando a porta é aberta e F quando a porta é fechada.

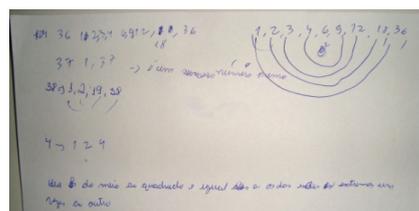


Fig. 03: “O que a pessoa 1 faz, a 36 desfaz, o que a pessoa faz 2 faz, a 18 desfaz e assim segue até que a pessoa 6 faz e não tem quem desfaza”.

Inicialmente, os alunos perceberam que o que a primeira pessoa fazia, a segunda desfazia como mostra a figura 02. Nesta figura, o aluno Liniker escreveu todos os números de 1 a 100 representando as portas e foi preenchendo com A, quando a porta é aberta e F quando a porta é fechada. Na figura 03, o aluno Gabriel mostra um diagrama diferente, ele escreveu também todos os números de 1 a 100, mas anotou os números das pessoas que mexiam nas portas. A seguir ele fez uma ilustração usando a porta 36 como exemplo, onde o que a pessoa 1 faz, a 36 desfaz, o que a pessoa faz 2 faz, a 18 desfaz e assim segue até que a pessoa 6 faz e não tem quem desfaza. Isso acontece

porque o 36 tem uma quantidade ímpar de divisores assim como todos os quadrados perfeitos. Como os primos possuem apenas dois divisores, fica incompatível um número ser primo e quadrado perfeito ao mesmo tempo, logo não há primos quadrados perfeitos.

As questões 5, 6 e 7 objetivaram levar o aluno a responder a oitava questão, também a partir de investigações. Quando perguntado se existe algum quadrado perfeito par, eles responderam rapidamente que sim e citaram exemplos, depois tentaram explicar o que são números pares. Em seguida, quando perguntados se existe quadrado perfeito terminado em 2, eles deviam voltar às anotações. Com alguma observação, notaram que não aparece número com esta condição. A seguir, deviam perceber que os quadrados perfeitos terminam sempre em 0, 1, 4, 5, 6 e 9. Entretanto é importante destacar que alguns estudantes perceberam este padrão quando ainda procuravam as portas que ficavam abertas.

Nas duas últimas questões, os alunos deviam registrar todos os conceitos encontrados e, por fim, verificar qual o menor quadrado perfeito maior que 1000 e o menor quadrado perfeito que antecede o número 2000 e quantos outros existem entre estes dois números.

Enfim, todas as questões foram formuladas com o objetivo de fazer o aluno pensar nas questões já resolvidas anteriormente e em novos padrões que ainda não haviam sido descobertos por eles.

O balanço final dessa pesquisa foi bastante positivo. Os alunos refletiram sobre suas descobertas e se comunicavam com muita empolgação. Cada grupo queria mostrar ao outro grupo todos os padrões que foram encontrados, o que demandou uma intervenção da professora, no sentido de analisar o percurso dos alunos.

Nas duas escolas, os alunos foram capazes de desenvolver raciocínios e buscar soluções. A turma 2, dividida em dois grupos, conseguiu encontrar vários padrões e finalmente generalizar a solução. A turma 1, também dividida em dois grupos, alcançou o resultado esperado, no entanto, não conseguiu perceber tantos padrões quanto foram observados pela segunda turma.

5. Conclusões

A análise da experiência desenvolvida através, inicialmente, de um problema e depois, da solução de dez questões, mostrou que este é um contexto que pode favorecer

a aprendizagem. A maioria dos alunos se sentiu motivada por esta atividade, conseguindo apresentar soluções criativas e corretas. Alunos aprendem a gostar de matemática e passam a ver esta disciplina com um olhar mais curioso e desafiador.

As investigações matemáticas são atividades que proporcionam experiências únicas como o ato de comunicar-se matematicamente, intuir sobre alguma questão, abstrair, experimentar, testar e generalizar. A partir desta atividade o estudante pode se descobrir e descobrir a verdadeira matemática, que vai muito além da matemática do livro didático.

O professor tem papel importante nesta pedagogia. Ele deve criar um ambiente agradável, onde o aluno se sinta a vontade para investigar, deve também facilitar a aprendizagem do educando e oferecer recursos para o seu sucesso.

Segundo Ponte et al (2003) a exploração de atividades investigativas nas salas de aula implica em menos tempo para outras atividades. Cabe ao professor tomar decisões. Mas vale ressaltar que esta atividade, quando trabalhada em certo conteúdo, pode ser tão produtiva que o professor pode até não sentir necessidade de trabalhá-lo, ganhando tempo para outros assuntos.

Atividades de inquirição, assim como qualquer outra, devem ser planejadas com antecedência. O professor deve saber que estas atividades na maioria das vezes não respeitam o tempo preestabelecido para o seu término. Não se deve interromper a produção dos alunos.

Esta pedagogia de investigação é muito rica e merece ser explorada na sala de aula. Essas atividades colocam o estudante como elemento atuante e ativo de sua própria aprendizagem. Entretanto, as investigações matemáticas e os processos envolvidos devem fazer parte do currículo escolar e não devem somente ser aceitos como atividades adicionais.

6. Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. V. 3: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997

ERNEST, P. (1996). **Investigações, resolução de problemas e pedagogia**. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), Investigar para aprender matemática: Textos selecionados (pp. 25-47). Lisboa: Projeto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. (1991). **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2006. Coleção Tendências em Educação Matemática. Editora Autêntica.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006, 179 p.

SILVA, A., VELOSO, E., PORFÍRIO, J., ABRANTES, P. O currículo de matemática e as Actividades de Investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 69-85.