

ÍNDICE

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS	2
RETA NUMERADA	2
CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS	4
SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Z}$	5
NÚMEROS OPOSTOS	5
VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO INTEIRO.....	6
CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS.....	9
SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Q}$	9
REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NUMEROS RACIONAIS	10
CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS	16
CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.....	16
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE $\mathbb{R}$	17
INTERVALOS REAIS	20
OPERAÇÕES COM INTERVALOS REAIS.....	21
PROPRIEDADES DAS DESIGUALDADES	27
RESPOSTAS DO EXERCÍCIOS.....	30
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	32

No final das séries de exercícios podem aparecer sugestões de atividades complementares. Estas sugestões referem-se a exercícios do livro “Matemática” de Manoel Paiva fornecido pelo FNDE e adotado pelo IFMG – Campus Ouro Preto durante o triênio 2015-2017.

Todos os exercícios sugeridos nesta apostila se referem ao volume 1.

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

O primeiro conjunto numérico que existiu foi o conjunto dos números naturais. Em algumas civilizações primitivas, as necessidades de contagem eram muito rudimentares bastando a numeração que surgiu de forma gradativa e naturalmente que hoje em dia representamos por 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Mais tarde, a ideia de “não existência”, foi representada pelo zero e este número foi acrescentado ao conjunto dos números naturais.

Este conjunto é representado por uma letra N maiúscula com uma dupla barra, como todo conjunto numérico, e você pode ver aqui.

$\mathbb{N}$

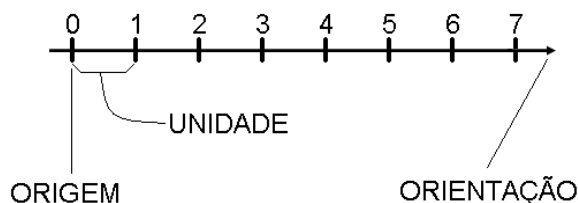
De forma prática, podemos dizer que os números naturais são os números de contagem mais o zero, assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

RETA NUMERADA

Todos os conjuntos numéricos que estudaremos poderão ser representados geometricamente por meio de uma reta que chamaremos de **reta numerada**. Sobre esta reta, escolhemos um ponto que servirá de origem e corresponderá ao

número zero. Tomaremos também uma unidade medida e uma orientação.



SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{N}$

Veja, nos exemplos abaixo, cinco importantes subconjuntos do conjunto dos números naturais:

Exemplos

1. Conjunto dos números naturais não nulos:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

2. Conjunto dos números naturais pares:

$$\mathbb{N}_P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

3. Conjunto dos números naturais ímpares:

$$\mathbb{N}_I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

4. Conjunto dos números naturais primos:

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

5. Conjunto dos números quadrados perfeitos:

$$\mathbb{Q} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$$

NOTAÇÃO ESPECIAL

A presença do asterisco (*) junto a um conjunto representa a ausência do elemento zero, assim:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

OPERAÇÃO FECHADA EM UM CONJUNTO

Dizemos que uma operação é fechada em um determinado conjunto quando operamos dois elementos deste conjunto e o resultado também se encontra neste conjunto.

No caso do conjunto dos números naturais, temos que:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}: x + y \in \mathbb{N}$$

$$x \cdot y \in \mathbb{N}$$

Ou seja, a soma e a multiplicação são operações fechadas dentro do conjunto dos números naturais.

Exercícios

1) Assinale com V ou F cada afirmativa abaixo quando for Verdadeira ou falsa, respectivamente. A seguir, justifique as afirmativas falsas.

() Todo número natural tem um único sucessor.

() Números naturais diferentes podem ter sucessores iguais.

() Existem algum número natural que não é sucessor de nenhum outro.

() Todo número natural tem antecessor natural.

() Entre um número natural e seu sucessor, sempre existe outro número natural.

() A soma de dois números naturais é sempre outro número natural.

() A diferença de dois números naturais é sempre outro número natural.

() O produto de dois números naturais é sempre outro número natural.

() O quociente de dois números naturais é sempre outro número natural.

() Existe um número natural que é maior que todos os números naturais.

() Existe um número natural que é menor que todos os outros números naturais.

2) Escreva outros subconjuntos de $\mathbb{N}$ pedidos em cada item abaixo usando a notação tabular:

a) M_6 : Conjunto dos múltiplos de 6.

b) D_{72} : Conjunto dos divisores de 72

c) A = Conjunto dos números primos menores que 100.

d) B = Conjunto dos números naturais de dois algarismos}

3) Determine $A \cap B$ e $A \cup B$ sendo

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Como vimos, a soma é uma operação fechada dentro do conjunto dos números naturais, ou seja, a soma de dois números naturais é sempre um número natural. Porém, o mesmo não ocorre com a subtração.

Por exemplo, a operação com números naturais $4 - 7$ não é possível em $\mathbb{N}$. Daí a necessidade de ampliar este conjunto incluindo, agora, os números negativos.

Não é novidade para você que o resultado da operação acima é -3 .

Segundo consta no livro do professor Benigno Barreto Filho,

“Podemos dizer que os primeiros vestígios de números negativos foram encontrados nos trabalhos de Diofanto de Alexandria por volta do ano de 250 d.C. A idéia de número negativo foi difícil de ser

aceita, mas amadureceu com a colaboração de vários matemáticos, principalmente Descartes e Newton” (Matemática Aula por aula, Barreto F., Benigno, 2000).

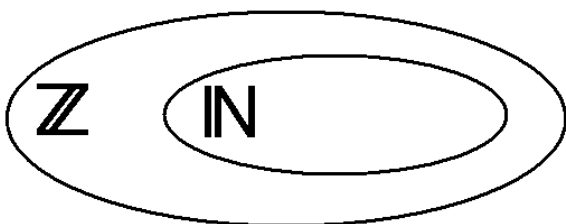
Este conjunto é representado por uma letra Z com dupla barra, veja:



Os números inteiros são compostos pela união entre o conjunto dos números naturais e os números negativos. Assim, temos que:

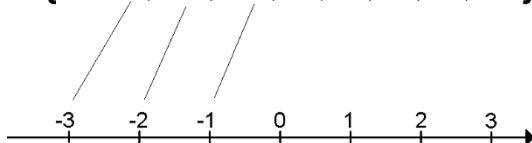
$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Como vimos, o conjunto dos números inteiros contém todos os números naturais e podemos representar, usando o diagrama de Venn, desta forma:



Na reta numerada, os números inteiros são representados tal qual fazemos com os naturais.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$



SUBCONJUNTOS DE Z

Assim como fizemos no conjunto dos números naturais, vamos destacar alguns subconjuntos notáveis dos inteiros.

Conjunto dos números inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{ \dots -3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots \}$$

Conjunto dos números inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{N}$$

Conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}^{+*} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}^- = \{ \dots -3, -2, -1, 0 \}$$

Conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}^{-*} = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1 \}$$

NÚMEROS OPOSTOS

No conjunto dos números inteiros, há uma simetria que deve ser considerada. Trata-se da simetria em relação ao zero.

Por exemplo, o simétrico do 3 é o -3. Estes números simétricos são também chamados de OPOSTOS.

Todo número inteiro possui seu oposto dentro do próprio conjunto Z.

VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO INTEIRO

Como vimos no tópico anterior, para todo inteiro k existe um inteiro $-k$ denominado OPOSTO de k tal que:

$$k + (-k) = 0$$

Quando representamos dois números opostos numa mesma reta numérica, ambos ficam à mesma distância da origem porém situados em de cada lado. Esta distância entre o afixo do ponto e a origem do sistema é chamada de MÓDULO.

Para todo inteiro k , definimos, então, o módulo de k e representamos por $|k|$ e lemos: “módulo de k ”.

Exemplos

O módulo de 7 e o módulo de -7 são iguais a 7. Podemos também, escrever desta forma:

$$\begin{aligned} |7| &= 7 \\ |-7| &= 7 \end{aligned}$$

OBS.: Comumente ouvimos falar que o módulo de um número é o próprio número sem sinal porém esta não é a definição correta. O conceito correto de módulo é, como foi dito acima, a distância entre o afixo do ponto e a origem do sistema.

OPERAÇÕES FECHADAS EM Z

Além da soma e multiplicação temos, agora, o fechamento da subtração, ou seja, a diferença entre dois inteiros, é sempre um número inteiro. O mesmo não podemos dizer da divisão.

Exercícios

4) Assinale com V ou F cada afirmativa abaixo quando for Verdadeira ou falsa, respectivamente. A seguir, justifique.

- () Todo número inteiro tem um único sucessor.
- () Todo número inteiro tem um único antecessor.
- () Entre dois números inteiros quaisquer há sempre outro número inteiro.
- () A soma de dois números inteiros é sempre outro número inteiro.
- () O simétrico do simétrico de -4 é -4.

5) Preencha as lacunas abaixo com os sinais de $\in$ ou $\notin$.

a) 5 _____ $\mathbb{N}$

b) $\frac{6}{5}$ _____ $\mathbb{Z}$

c) -12 _____ $\mathbb{N}^*$

d) $-\frac{1}{4}$ _____ $\mathbb{Z}_-$

e) 5 _____ $\mathbb{N}_+^*$

f) $(2+3)$ _____ $\mathbb{N}^*$

g) $(6-12)$ _____ $\mathbb{Z}_-^*$

h) -7 _____ $\mathbb{Z}_+$

6) Determinar, no campo dos inteiros, a solução da equação $4x^2 - x - 3 = 0$.

7) Calcule:

a) $|-12| + |-5|$

b) $|17| - |-2|$

c) $|3 + 11 - 12|$

d) $|-3 + 8 - 15|$

e) $|3(-2) + 4|$

f) $|-2(-5) - 16|$

8) Determine os seguintes conjuntos

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = -1\}$

9) Assinale com V ou F cada afirmativa abaixo quando for **Verdadeira** ou **Falsa**, respectivamente.

a) ()

$$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (m+n) \in \mathbb{Z}$$

b) ()

$$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z}$$

c) ()

$$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (m \cdot n) \in \mathbb{Z}$$

d) ()

$$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*) \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{Z}$$

10) Complete com =, < ou >.

a) -7 ____ $+3$

b) 0 ____ -10

c) -2 ____ -9

d) $+8$ ____ -12

e) $|-5|$ ____ -5

f) $|-6|$ ____ 2 ____ $|-3|$

g) $|-4|$ ____ $|-5|$

h) $|-8|$ ____ $|8|$

11) Forme os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -8 < x < -3\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

O conjunto dos números inteiros é fechado para adição, subtração e multiplicação mas não acontece o mesmo com a divisão. Note que apesar de $(+18) : (-3)$ possuir como solução um número inteiro, o resultado de $(-3) : (+18)$ não pertence a $\mathbb{Z}$. Por esse motivo, faz-se necessária a ampliação do conjunto dos números inteiros, daí surgiu o conjunto dos números racionais.

Também é interessante lembrar que a idéia de medir levou à necessidade de ampliação dos conjuntos dos inteiros. Esta idéia está intimamente ligada à de comparar, ou seja, quantas vezes uma determinada unidade cabe dentro de algo que deve ser medido?

Muitas vezes, a unidade não cabe uma quantidade inteira de vezes na medição e, aí, aparece mais uma vez a necessidade de lidarmos com números fracionários.

Tal qual os conjuntos dos números naturais e inteiros, os racionais possuem um símbolo, trata-se de uma letra Q também com dupla barra

Q

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração, ou, em termos técnicos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Todo número racional também pode ser escrito na forma de um decimal exato ou não exato desde que periódico.

SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Q}$

No conjunto dos números racionais, podemos destacar os seguintes sub-conjuntos:

$\mathbb{Q}^*$ Conjunto dos números racionais não nulos.

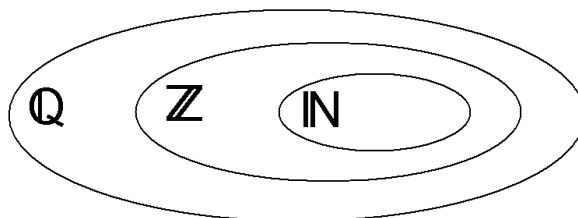
$\mathbb{Q}_+$ Conjunto dos números racionais ao negativos

$\mathbb{Q}_+^*$ Conjunto dos números racionais positivos.

$\mathbb{Q}_-$ Conjunto dos números racionais não positivos.

$\mathbb{Q}_-^*$ Conjunto dos números racionais negativos.

Todo número inteiro ou natural pode ser escrito como um fração com denominador 1, assim, consequentemente, os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Pelo diagrama, temos:





REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NUMEROS RACIONAIS

Como vimos na página anterior, todo número racional também pode ser escrito na forma de um decimal exato ou não exato desde que periódico.

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, a representação decimal desse número é obtida dividindo-se a por b podendo resultar em decimais exatos finitos ou periódicos.

Exemplos

Decimais exatos finitos

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$-\frac{5}{8} = 0,625$$

$$\frac{9}{50} = 0,18$$

$$\frac{7}{1} = 7$$

Dízimas periódicas infinitas

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\overline{6}$$

$$\frac{177}{990} = 0,1787878... = 0,1\overline{78}$$

FRAÇÃO GERATRIZ

Fração geratriz é a denominação dada à representação fracionária de determinada dízima periódica.

Para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica, podemos seguir um algoritmo simples. Na verdade, existem diversos “macetes” para se chegar à fração geratriz e este não é, necessariamente o que você vai achar mais fácil, vale a pena pesquisar e conhecer outros. Quando você estiver no 2º ano, certamente conhecerá outro ao estudar Progressão Geométrica.

- Determinar a geratriz de 0,666...

$$x = 0,666...$$

$$10x = 6,666...$$

$$10x = 6 + 0,666...$$

$$10x = 6 + x$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Assim, a fração geratriz de 0,666... é $\frac{2}{3}$.

- Determinar a geratriz de $0,272727\ldots$

$$x = 0,272727\ldots$$

$$100x = 27,272727\ldots$$

$$100x = 27 + 0,272727\ldots$$

$$100x = 27 + x$$

$$99x = 27$$

$$x = \frac{27}{99}$$

$$x = \frac{3}{11}$$

- Determinar a geratriz de $0,1\overline{27}$

$$x = 0,1272727\ldots$$

$$10x = 1,272727\ldots$$

$$10x = 1 + 0,272727\ldots$$

$$0,272727\ldots = \frac{3}{11} \text{ (Conforme segundo exemplo)}$$

$$10x = 1 + \frac{3}{11}$$

$$10x = \frac{14}{11}$$

$$x = \frac{14}{110}$$

$$x = \frac{7}{55}$$

Como vimos no tópico sobre o conjunto $\mathbb{Z}$, entre dois números inteiros, nem sempre existe outro inteiro porém, com o conjunto $\mathbb{Q}$ é diferente: “entre dois números racionais, sempre existirá outro racional mas isto não significa dizer que os racionais preenchem toda a reta, ou seja, existem números que não são racionais e isto veremos no próximo conjunto numérico.

Agora vamos a alguns exercícios.

Exercícios

12) Calcule:

a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{0,2 \times 0,3}{3,2 - 2}$

13) Calcule:

$$\text{a) } \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \div \frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\text{b) } \frac{5 - 125 \times 0,2}{(0,5)^2 + 3,6 \div 18}$$

14) Calcule a média aritmética entre os números abaixo:

6,4 8,2 16

15) Determine o valor de:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

16) Coloque em ordem crescente os números $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{6}$ e $\frac{14}{9}$.

c) 0,5% de 1200

d) 7,2 % de 10,5

17) Calcule:
a) 20% de 1250

e) 18% de 11,25

b) 160% de 450

f) 12,5 % de 12,5

18) Recentemente o governo autorizou um aumento de 22% no preço dos remédios porém a indústria resolveu aumentar apenas 80% da taxa autorizada. Responda:

a) Caso a indústria seguisse o aumento autorizado, qual seria o novo preço de um medicamento que originalmente custava \$48,20?

b) De acordo com o aumento realizado pela indústria, qual o novo preço de um medicamento que custava \$62,50?

c) Qual foi o aumento percentual realizado pela indústria?

d) Após o aumento, um medicamento estava sendo vendido por \$47,04. Qual era o preço deste medicamento antes do aumento?

19) Resolva em $\mathbb{Q}$ as equações:

a) $\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\right) = 1 - x$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

20) Calcule o valor da expressão abaixo:

$$\frac{1,969696... \cdot (0,333... - 0,5)}{0,454545... + 0,4666...}$$

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Como vimos, há números decimais que podem ser escritos na forma fracionária com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Estes números são chamados de racionais. Entretanto, existem outros números que **NÃO podem ser escritos sob a forma de fração de termos inteiros**. Estes números são os decimais infinitos não periódicos e são denominados IRRACIONAIS.

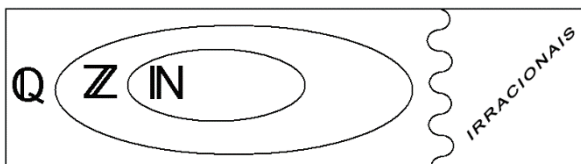
Exemplos

$$\sqrt{2} = 1,414213562..$$

$$-\sqrt{3} = -1,732050807568...$$

$$\pi = 3,1415926535898...$$

Podemos agora fazer uma representação gráfica envolvendo todos os conjuntos numéricos que já estudamos: Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais.



Até agora, cada conjunto que víamos continha o anterior, mas isto não acontece entre os racionais e os irracionais. Estes dois conjuntos se complementam e formam um novo conjunto chamado de CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

Alguns autores indicam uma letra I, maiúscula e com uma dupla barra para representar conjunto dos números racionais. Assim fica este símbolo?

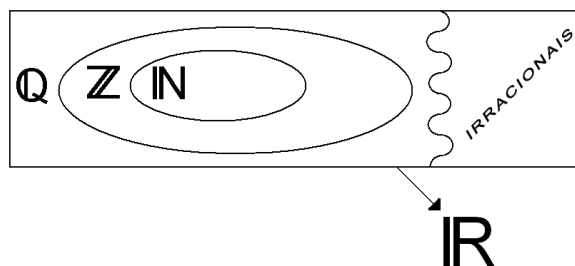
II



CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Denominamos número real a todo número racional ou irracional. Assim, o conjunto dos números reais, que representaremos por uma letra R, é a união dos racionais (Q) com os irracionais (I).

Desta forma, temos a mesma representação vista ao lado.



Podemos notar que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

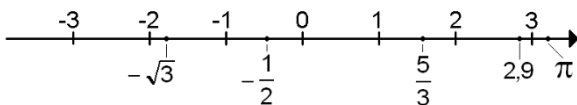
$$\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Normalmente o conjunto dos números reais é tratado como conjunto universo, nesse caso, o conjunto dos números irracionais é chamado de complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$ ou também de não racionais, assim:

$$\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{Q}}$$



REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE $\mathbb{R}$



Os números reais podem ser representados numa reta de tal modo que todo número real corresponde a um e somente um ponto da reta e a todo ponto da reta corresponde um e somente um número real.

INVERSO E OPOSTO

Todo número real com exceção do zero possui um inverso multiplicativo e um oposto aditivo. (o zero possui apenas o oposto).

O oposto aditivo (ou simplesmente oposto) de um número k é o número $-k$ e podemos dizer que:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists (-k) \mid k + (-k) = 0$$

(Lemos: **qualquer que seja k real, existe menos k tal que k mais menos k é igual a zero.**)

O inverso multiplicativo (ou simplesmente inverso) de um número k é o número $\frac{1}{k}$ e podemos dizer que:

$$\forall k \in \mathbb{R}^*, \exists \left(\frac{1}{k}\right) \mid k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

(Lemos: **qualquer que seja k real não nulo, existe um sobre k tal que k vezes um sobre k é igual a um.**)

Exercícios

21) Preencha as lacunas em cada item com $\in$ ou $\notin$:

- a) $0,4$ _____ $\mathbb{Z}$
- b) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbb{Q}$
- c) $0,343434 \dots$ _____ $\mathbb{Q}$
- d) -1 _____ $\mathbb{R}^*$
- e) $\sqrt{16}$ _____ $\mathbb{Q}$

f) $0,123456789101112 \dots$ _____ Q

g) $\frac{16}{8}$ _____ Z

h) 4 _____ Q

i) $\sqrt{-2}$ _____ R

j) π _____ R

k) $3,18$ _____ $\tilde{Q}$

l) $\frac{1}{3}$ _____ Q

22) Determine o inverso e o oposto em cada item abaixo:

a) 7

b) -6

c) $\frac{2}{3}$

d) $\sqrt{5}$

e) $1 - \sqrt{2}$

f) $2\sqrt{6}$

23) Representar os seguintes conjuntos por extensão de seus elementos (representação tabular):

a) $A = \{x \in N \mid x \leq 6\}$

b) $B = \{x \in Z \mid -4 < x \leq 2\}$

c) $C = \{x \in N \mid 2x - 1 = 7\}$

d) $D = \{x \in Z^* \mid x^2 - 2x = 0\}$

e) $E = \{x \in R \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

24) Assinale com V ou F cada afirmativa abaixo quando for Verdadeira ou falsa, respectivamente. Justifique as falsas.

() $N \subset Z$

() $N^* \not\subset N$

() $N^* \subset N$

() $Z_+ \subset Z$

() $Z_- \not\subset Z$

() $Q \subset R$

() $Z \subset Q$

() $Z_+ \subset Q_+$

() $N \not\subset R$

() $R^*_- \subset R$

25) Qual valor obtemos quando simplificamos a expressão abaixo?

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

26) Observe estes 9 números:

$$\begin{array}{ccc} -4 & \frac{1}{3} & 0,888... \\ \sqrt{6} & 0 & -1\frac{3}{5} \\ 4,86 & 8 & \pi \end{array}$$

Dentre eles, quais são:

a) Naturais

b) Inteiros

c) Racionais

d) Irracionais

e) Reais

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Pág. 34 – Exercícios 21 a 25

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS REAIS

Dados dois números reais **a** e **b**, uma das três sentenças seguintes é verdadeira:

$$a = b$$

$$a > b$$

$$a < b$$

Daí temos também que:

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Destas afirmações, podem os concluir que o conjunto dos números reais é ordenável e, daí, podemos extrair intervalos.

INTERVALOS REAIS

O conjunto dos números reais possui subconjuntos denominados intervalos reais que são determinados por desigualdades como veremos agora.

Para todas as situações a seguir, vamos considerar dois números reais **a** e **b** com $a < b$.

1. Intervalo aberto de extremos **a** e **b**.

$$] a; b [= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$



2. Intervalo fechado de extremos **a** e **b**.

$$[a; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$



3. Intervalo aberto à direita (ou fechado à esquerda) de extremos **a** e **b**.

$$[a; b [= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$



4. Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos **a** e **b**.

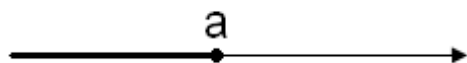
$$] a; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$



Existem ainda, os intervalos indicados pelo infinito (∞).

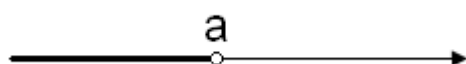
5.

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



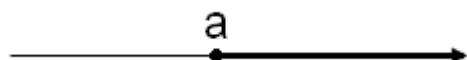
6.

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



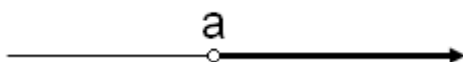
7.

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



8.

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



Obs.:

- Os números **a** e **b** são denominados extremos dos intervalos.
- O intervalo é sempre **aberto** na notação de infinito.
- Podemos utilizar () para indicar extremidade aberta nos intervalos $[a; b[= [a; b)$, $]a; b] = (a; b]$ e $]a; b[= (a; b)$.

OPERAÇÕES COM INTERVALOS REAIS

Exemplos

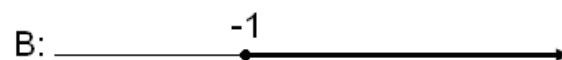
Dados os intervalos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

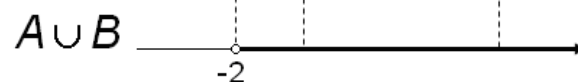
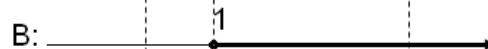
$$C =]-\infty; 3[$$

Podemos representar:



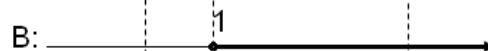
Daí temos:

a) $A \cup B$



$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$

b) $A \cap B$



$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

c) $A \cap C$



$A \cap C$

d) $A \cup C$



$A \cup C$

e) $B \cup C$



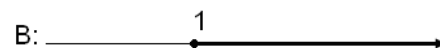
$B \cup C$

f) $B \cap C$



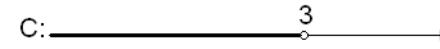
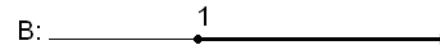
$B \cap C$

g) $A \cup B \cup C$



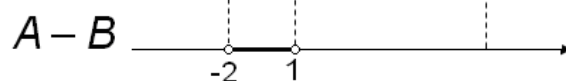
$A \cup B \cup C$

h) $A \cap B \cap C$



$A \cap B \cap C$

i) $A - B$



$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$$

j) $A - C$



$A - C$



Exercícios

27) Faça a representação gráfica e a notação de intervalo para cada conjunto real abaixo:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3} \leq x < 6\}$

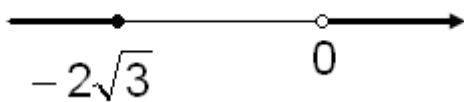
28) Descreva cada um dos conjuntos pela notação característica de seus elementos:

a) $A = \left[-5, -\frac{5}{3}\right]$

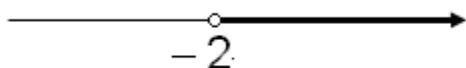
b) $B =]-\infty, -2[$

c) $C =]3, +\infty[$

d) D:



e) E:



29) Determine $L \cup M$ e $L \cap M$ sendo:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

$$M =]-3; 3[$$

30) Determine a união e a intersecção dos seguintes intervalos:

a) $[1; 3]$ e $[2; 5]$

b) $] -1; 4]$ e $[3; 7]$

c) $]2; 4[$ e $[1; 3[$

d) $[-5; 5]$ e $[0, 3[$

e) $] -\infty, 1]$ e $[1, 3]$

f) $\left[-\frac{1}{3}; 4\right]$ e $\left[-\frac{3}{7}; \sqrt{15}\right]$

g) $[-\infty; \sqrt{8}[$ e $[0; 9,2]$

h) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$ e $[-2,5; 2,5]$

31) Seja A o conjunto de todos os números múltiplos de 6 e B o conjunto de todos os números múltiplo de 8. Qual a característica do conjunto C obtido da intersecção de A e B?

32) Determine $A \cap B$ em cada caso:

a) $A = [-3; 3]$ e $B = [0; 6]$

b) $A =]1; 7[$ e $B =]2; 5[$

c) $A =]-\infty; -1]$ e $B = 2-; +\infty[$

d) $A = [1; 4]$ e $B = [4; 9]$

33) Em cada caso da questão anterior, determine $A \cup B$:

a)

b)

c)

d)

34) Em cada caso da questão 32, determine $A - B$:

a)

b)

c)

d)

35) Sendo $M = [0; 3]$ e $G = [7; 9]$, determine:

a) $M \cap G$

b) $M \cup G$

c) $M - G$

d) $R - G$

PROPRIEDADES DAS DESIGUALDADES

Em todos os casos, vamos considerar os números reais a e b quaisquer com $a < b$ e o número real qualquer c .

P.1.

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

Em palavras, podemos dizer que somando um mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, ela não se altera.

P.2.

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \forall c > 0$$

$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \forall c < 0$$

Podemos dizer que multiplicando os dois lados de uma desigualdade por um mesmo número positivo, ela não vai alterar e multiplicando os dois lados da desigualdade por um mesmo número negativo, a desigualdade inverte.

Exercícios

36) Resolva, no campo dos reais, as seguintes inequações:

a) $5x - 20 > 0$

b) $-4x + 32 > 0$

c) $-3x + 8 < 6x + 2$

d) $5x + 2(x - 1) > 3$

e) $3x - 4(1 - x) \leq 2 - x$

f) $3(x - 1) - 2(1 - x) \geq 0$

37) Determine o intervalo real que satisfaz, simultaneamente as duas inequações abaixo:

$$4x - 3 < 6x + 7$$

$$3(x - 2) > 2x + 4$$

(Dica: resolva independentemente cada uma das inequações e em seguida, faça a intersecção das soluções)

38) Assim como foi feito na questão anterior, determine o intervalo real que satisfaz, simultaneamente as duas inequações:

a) $5 \leq 3x + 4$ e $6x + 1 < 4x + 7$

b) $3 - 2x \leq 1$ e $3x - 1 \leq 5$

39) Se $x = 1,333\dots$ e $y = 0,1666\dots$, então quanto vale $x + y$?

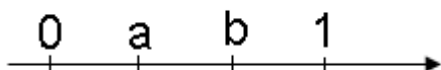
ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Pág. 36 – Exercícios 26 a 28

Pág. 37 a 39 – Exercícios 1 a 18

40) Na reta real da figura estão representados os pontos 0, a, b e 1.

Localize o ponto P sabendo que $P = \frac{b}{a}$.



41) Cada número real da 1ª coluna pertence um intervalo da segunda coluna. Associe corretamente:

- | | |
|--|---------------------|
| a) $\frac{4}{3} - \frac{11}{6}$ | () $(-\infty, -5]$ |
| b) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$ | () $(-5, -1)$ |
| c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ | () $[-1, 2)$ |
| d) $-\sqrt{48}$ | () $[2, 7]$ |
| e) $\pi - \sqrt{2}$ | () $(7, +\infty)$ |

RESPOSTAS DO EXERCÍCIOS

1) V F V F F V
F V F F V

2) a) $M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\}$
b) $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$
c) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$
d) $B = \{10, 11, 12, 13, \dots, 98, 99\}$

3) $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4) V V F V V

5) $\in \notin \notin \in \in \in \in \notin$

6) $S = \{1\}$

7) a) 17 b) 15 c) 2
d) 15 e) 10 f) 6

8) a) $\{-4, 4\}$ b) $\{-1, 1\}$
c) $\{0\}$ d) $\emptyset$

9) V V V F

10) a) $<$ b) $>$ c) $>$
d) $>$ e) $>$ f) $=$
g) $<$ h) $=$

11) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 $B = \{\dots, -4, -3, -2\}$
 $C = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 $D = \{-7, -6, -5, -4\}$
 $E = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
 $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

12) a) $-\frac{1}{15}$ b) 0,05

13) a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{95}{9}$

14) 10,2

15) $\frac{18}{13}$

16) $\frac{14}{9} < \frac{7}{4} < \frac{11}{6}$

17) a) 250 b) 720
c) 6 d) 0,756
e) 2,025 f) 1,5625

18) a) \$58,80 b) \$73,50
c) 17,6% d) \$40,00

19) a) $S = \{3\}$ b) $S = \{-1, 1\}$

20) $-\frac{325}{1012}$

21) $\notin \notin \in \in \in \notin$
 $\in \in \notin \in \notin \in$

22) a) $\frac{1}{7}e - 7$ b) $-\frac{1}{6}e + 6$
c) $\frac{3}{2}e - \frac{2}{3}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{5}e - \sqrt{5}$
f)

e) $-1 - \sqrt{2}e + \sqrt{2} - 1$ $\frac{\sqrt{6}}{12}e - 2\sqrt{6}$

23) a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
c) $C = \{4\}$ d) $D = \{2\}$
e) $E = \emptyset$

24) V F V V F V V V F V

25) $\sqrt{2}$

26) a) 0 e 8
b) -4, 0 e 8
c) -4, $\frac{1}{3}$, 0,888..., 0, $-1\frac{3}{5}$, 4,86 e 8
d) $\sqrt{6}$ e π
e) todos

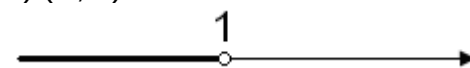
27) a) $]-1; 3]$



b) $[2; 6]$



c) $(\infty; 1)$



d) $[\sqrt{3}; 6)$



28) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < -\frac{5}{3}\right\}$
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\sqrt{3} \text{ ou } x > 0\}$
 $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

29) $L \cup M = \mathbb{R}$
 $L \cap M =]-3; -1[\cup [2; 3[$

30)

31) É o conjunto formado por todos os múltiplos de 24.

32) a) $[0; 3]$ b) $]2; 5[$
c) $[-; 3]$ d) $[4]$

33) a) $[-3; 6]$ b) $]1; 7[$
c) $\mathbb{R}$ d) $[1; 9]$

34) a) $[-3; 0[$ b) $]1; 2] \cup [5; 7[$
c) $]-\infty, -2[$ d) $[1; 4[$

35) a) $\emptyset$ b) $[0; 3] \cup [7; 9]$
c) $[0; 3]$ d) $]-\infty; 7] \cup [9; +\infty[$

36) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{7}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{4}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

37) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < \frac{2}{5}\right\}$

38) a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 3\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

39) $\frac{3}{2}$

40)

41) d a e b c

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANTE, Luiz Roberto;
Matemática. São Paulo, Ática, 2004

MACHADO, Antônio dos Santos;
Matemática, Temas e Metas. São Paulo,
Atual, 1988

IEZZI, Gelson e outros;
Matemática, Volume único. São Paulo,
Atual, 2002

BARRETO FILHO, Benigno e
outro; Matemática, Aula por Aula. São
Paulo, FTD, 2000

DOS SANTOS, Carlos Alberto
Marcondes e outros; Matemática, Novo
Ensino Médio. São Paulo, Ática, 2003

VÍDEOS SUGERIDOS NESTA APOSTILA

Página 10

<http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-numericos-p1>

Página 16

<http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-numericos-p2>

Página 17

<http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-numericos-p3>

Página 23

<http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/operacoes-com-intervalos>