ÍNDICE

INTRODUÇÃO 2
RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA 3
SUBCONJUNTOS E RELAÇÃO DE INCLUSÃO 6
CONECTIVOS E e OU 15
OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS 17
QUANTIDADE DE ELEMENTOS 24
CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS 31
CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS 34
CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS 37
CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS 43
CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS 44
RESPOSTAS 57
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA 61

No final das séries de exercícios podem aparecer sugestões de atividades complementares. Estas sugestões referem-se a exercícios do livro "Matemática" de Manoel Paiva fornecido pelo FNDE e adotado pelo IFMG – Campus Ouro Preto durante o triênio 2015-2017.

Todos os exercícios sugeridos nesta apostila se referem ao volume 1.

INTRODUÇÃO

Os dois principais objetos de estudo na matemática são os números e as figuras geométricas. Nesta apostila estudaremos os agrupamentos de números, os Conjuntos Numéricos, mas antes, entenderemos o que é conjunto e como são operados.

Definição

A noção de conjunto é bastante simples e fundamental na Matemática e a partir desta definição, podem ser expressos diversos conceitos matemáticos.

Conjunto é uma coleção qualquer de objetos que são os seus ELEMENTOS.

EXEMPLOS

S = {Conjunto dos estados da região Sudeste do Brasil}

ou

S = {Minas Gerais, São Paulo, Espírito Santo, Rio de Janeiro}

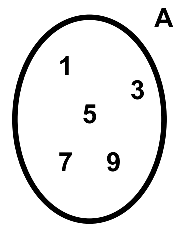
Representação

Existem várias formas de apresentar um conjunto. Seja citando cada um de seus elementos (Representação Tabular), descrevendo características comuns entre eles ou apresentando em um diagrama. Geralmente usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto para dar nomes aos conjuntos, porém isto não é uma regra e sim um costume.

EXEMPLOS

Podemos falar no conjunto A formado pelos números 1, 3, 5, 7 e 9 o qual podemos representar colocando os elementos entre chaves.
A = {1, 3, 5, 7, 9}

Podemos também indicar os elementos dentro de uma curva fechada simples. Esta representação do conjunto A é conhecida como Diagrama de Venn.



John Venn foi um matemático inglês que viveu entre 1834 e 1923. Por volta do ano de 1900 ele criou tal representação que veio para facilitar, de forma significante, a resolução de muitos problemas.

O conjunto citado anteriormente é formado pelos números ímpares de 1 a 9. É um conjunto com um número limitado de elementos. No caso, 5 elementos.

Consideremos agora o conjunto B dos números naturais ímpares. Observe, agora, que o conjunto foi descrito por uma propriedade comum de seus elementos: são todos os números naturais ímpares. Podemos representá-lo desta forma:

B = {x | x é um número natural ímpar}

B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ... }

Neste caso, as reticências indicam um conjunto infinito. Mas não é sempre assim. Veja este outro caso:

$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... 99\}$

Aqui, as reticências indicam que o existe um grande número de elementos, mas as regras de formação devem ser mantidas.

Devemos lembrar ainda, que existem conjuntos que apresentam apenas um elemento. Estes conjuntos são chamados de UNITÁRIOS.

EXEMPLOS

Conjunto dos satélites naturais da Terra
S = {Lua}

Conjunto dos números pares e primos
$P = \{2\}$

Os conjuntos com nenhum elemento são chamados de CONJUNTO VAZIO e existem duas formas de representar este conjunto. Veja:

$F = \{\ \ \}$ ou $F = \varnothing$

EXEMPLOS

Conjunto M das cidades de Minas Gerais banhadas pelo mar: $M = \{\ \ \}$

Conjunto D dos números negativos maiores que 10. $D = \varnothing$

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Conheça os símbolos

$\in$ **Pertence a** ou **é elemento de**

$\notin$ **Não pertence a** ou **não é elemento de**

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto usamos a relação de pertinência. Assim, sendo **A** o **conjunto das vogais** do nosso alfabeto, dizemos que **a** pertence ao conjunto **A**

$$a \in A$$

e que **m** não pertence ao conjunto **A**

$$m \notin A$$

EXEMPLOS

Seja $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ Podemos dizer que:

$0 \in B$, $2 \notin B$, $25 \in B$ e $90 \notin B$

Vamos considerar, agora, o conjunto unitário $T = \{3\}$. Temos que $3 \in T$, isto é $3 \in \{3\}$ e não é correto escrever $3 = \{3\}$ pois o primeiro é um número e o segundo é um conjunto.

Não podemos, neste caso, comparar objetos de naturezas diferentes. Um conjunto unitário e o elemento deste conjunto são coisas distintas assim como a estante que contém um livro não é a mesma coisa que o livro isolado.

É importante destacar também que existem conjuntos cujos seus elementos são, também, conjuntos. Por exemplo, no conjunto **$P = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{1, 4\}\}$** os elementos são $\varnothing$, **{0}**, **{1}** e **{1, 4}** . Assim temos que $\varnothing \in$ **P**, **{0}** $\in$ **P**, **{1}** $\in$ **P** e **{1, 4}** $\in$ **P**. Note que **1** $\notin$ **P** e também que **4** $\notin$ **P** porque **1** e **4** não são elementos de **P**.

Podemos fazer uma analogia que facilite o entendimento desta idéia: Um bom exemplo para ilustrar esta situação é você pensar que pertence ao conjunto dos alunos do curso de administração do IFMG mas você não pertence ao conjunto dos cursos do IFMG.

Por consequência, devemos notar que **{$\varnothing$}** é um conjunto unitário cujo único elemento é o conjunto vazio $\varnothing$. Temos que $\varnothing \in$ **{$\varnothing$}**. A igualdade $\varnothing$ **= {$\varnothing$}** é falsa pela mesma razão, já vista antes, que **3 = { 3 }** é falso.

Conjuntos Iguais

Dizemos que dois conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos. Os conjuntos A e B são iguais se todo elemento de A também pertence a B e todo elemento de B também pertence a A.

EXEMPLOS

Ex.1: Seja J o conjunto das letras da palavra AMOR e seja K o conjunto das letras da palavra ROMA.

J = {a, m, o, r}
K = {r, o, m, a}
{a, m, o, r} = {r, o, m, a}

Vejamos agora, dois outros conjuntos, um conjunto E formado pelas letras da palavra AMAR, outro conjunto F formado pelas letras da palavra AMARRAR. Veja:

E = {a, m, a, r}
F = {a, m, a, r, r, a, r}

Observe que todos os elementos de E pertencem a F e que todos os elementos de F pertencem a E. Neste caso, E = F

{a, m, a, r} = {a, m, a, r, r, a, r} =
={a, m, r}

Este exemplo mostra que não precisamos repetir elemento dentro de um mesmo conjunto, basta indicar cada elemento uma só vez.

Se dois conjuntos não são iguais, escrevemos que **A** $\neq$ **B** (Lemos: A é diferente de B). Para que isto ocorra, é necessário que haja pelo menos um elemento que pertença a um dos conjuntos e não pertença ao outro, usando este argumento, podemos justificar, inclusive, porque $\varnothing \neq$ **{ $\varnothing$ }.**

EXERCÍCIOS

1) Reescreva cada conjunto na forma tabular (dando, um a um, os seus elementos):

a) A = { x | x é um número natural menor que 10}

b) B = { x | x é natural primo menor que 20}

c) C = { x | x é mês de 30 dias}

d) D = { x | x é satélite natural da Terra}

e) E = { x | x é país da América do Norte}

f) F = { x | x é mês que tem a letra R no nome}

2) Identifique os conjuntos unitários e os vazios:

a) A = { x | x é oceano que banha o Brasil}

b) B = { x | x é mulher que já foi presidente dos EUA}

c) C = { x | x é mês cujo nome começa com a}

d) D = { x | x é satélite natural da Terra}

e) E = { x | x é mês com menos de 30 dias}

f) F = { x | x é natural e x + 1 = 0}

g) $G = \left\{ x \mid \frac{1}{x} = 0 \right\}$

3) Dados os conjuntos A = {a, b} e B = {{a}, {b}}, classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

( ) $a \in A$

( ) $a \in B$

( ) $b \notin A$

( ) $b \notin B$

( ) $\{a\} \in A$

( ) $\{a\} \in B$

( ) $\{b\} \notin A$

( ) $\{b\} \notin B$

( ) A = B

( ) A e B tem a mesma quantidade de elementos.

4) Sendo A = {1, 2, {1}, {1, 2}} complete com $\in$ ou $\notin$ formando sentenças verdadeiras.

a) 2 .... A

b) {2} .... A

c) {1, 2} .... A

d) Ø .... A

5) Complete com $\in$ ou $\notin$ formando sentenças verdadeiras.

a) {a} .... {a, b}

b) {a}.......... {{a}, {b}, {c}}

c) 0 .... Ø

d) {Ø}.......... Ø

6) Sendo

A = {x | x é ímpar entre 2 e 8};
B = {x | x é algarismo do número 735}; e
C = {x | x é algarismo do nº 33 577},

classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas abaixo:

( ) A = B

( ) B = C

( ) $A \neq C$

( ) $B \neq C$

SUBCONJUNTOS E RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Conheça os símbolos

$\subset$ **Está contido**

$\not\subset$ **Não está contido**

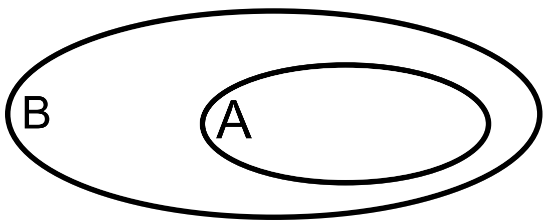
$\supset$ **Contém**

Consideremos o conjunto A das vogais da palavra BRASIL: A = {a, i} e o conjunto B de todas as letras da palavra BRASIL: B = {b, r, a, s, i, l}.

Podemos perceber que todos os elementos do conjunto A também pertencem ao conjunto B.

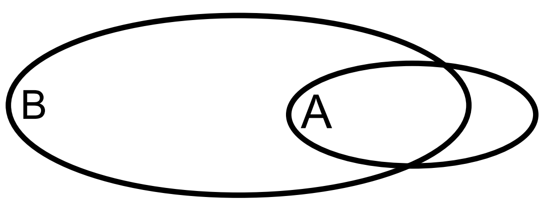
Quando isto ocorre, dizemos que A é um subconjunto de B ou que A é parte de B, indicamos $A \subset B$ e lemos A está contido em B ou ainda $B \supset A$ e lemos B contém A

Daí temos que:
$A \subset B$ quando todo elemento de A também pertence a B



$A \subset B$ (Lemos: **A está contido em B**)
$B \supset A$ (Lemos: **B contém A**)

Se existir ao menos um elemento de A que não pertença a B, dizemos que:



$A \not\subset B \rightarrow$ A não está contido em B

EXEMPLOS

Sendo A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 4, 5}, C = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, faça um diagrama e preencha as relações de inclusão a seguir:

A ____ C   A____ B

B ____ C   B____A

C ____A   C____B

C ____A   C____B

EXERCÍCIOS

7) Dado A = {a, e, i, o, u} dê quatro exemplos de subconjuntos de A com três elementos.

8) Dado A = {1, 2, 3, 4}, forme todos os subconjuntos de A com dois elementos.

9) Sendo A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {3, 4, 5, 6, 7} e D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, classifique em verdadeira ou falsa cada sentença.

( ) $A \subset B$

( ) $B \subset C$

( ) $C \subset D$

( ) $D \subset A$

( ) $D \supset B$

( ) $C \supset A$

( ) $C \supset B$

( ) $B \supset A$

( ) $B \not\subset D$

( ) $C \not\subset B$

( ) $A \not\subset C$

( ) $D \not\subset A$

10) Classifique como verdadeiro ou falso.

( ) $\{a, b\} \subset \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$

( ) $\{a\} \subset \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$

( ) $\{a\} \in \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$

( ) $\{a, b\} \in \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$

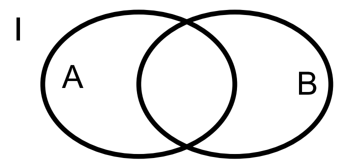
( ) $\{a, \{a\}\} \subset \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$

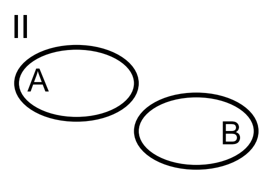
11) Represente, num diagrama, o conjunto A de todas as pessoas nascidas em Ouro Preto e o conjunto B de todos os mineiros.

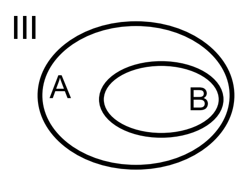
12) Seja A o conjunto dos alunos do IFMG e B o conjunto de todas as pessoas inteligentes. Admitindo como verdadeira a frase “Todo aluno do IFMG é inteligente”, como se representam num diagrama os conjuntos A e B?

13) A negação da sentença $A \subset B$ (“todo elemento de A pertence a B”) é a sentença $A \not\subset B$ (“Existe ao menos um elemento de A que não pertence a B”), então, qual a negação da frase “todo aluno do IFMG é inteligente”?

14) Considerando A o conjunto dos alunos do IFMG e B o conjunto de todas as pessoas inteligentes e considerando a frase “existe aluno do IFMG que não é inteligente”, podemos ter os seguintes casos.







Associe cada caso acima a uma frase abaixo:

( ) Nenhum aluno do IFMG é inteligente.

( ) Existe aluno do IFMG inteligente, aluno do IFMG não inteligente e inteligente que não é aluno do IFMG.

( ) Existe aluno do IFMG não inteligente mas todo inteligente é aluno do IFMG.

Quantificadores

Conheça os símbolos

$\forall$ **Qualquer que seja**

$\exists$ **Existe**

$\exists|$ **Existe um único**

$\nexists$ **Não existe**

Em relação ao conjunto A = {6, 8, 9, 10, 12}, podemos fazer algumas afirmações:

- Qualquer que seja o elemento de A, ele é natural.
- Existe elemento de A que é número par.
- Existe um único elemento de A que é número ímpar.
- Não existe elemento de A que é número primo.

Os símbolos apresentados no início desta seção são próprios para representar as expressões citadas acima. Estes símbolos são chamados de **quantificadores**.

Desta forma, poderíamos reescrever o exemplo anterior da seguinte forma:

Em relação ao conjunto A = {6, 8, 9, 10, 12}, podemos fazer algumas afirmações:

$$\forall\, x \in A, x \text{ é } natural$$
$$\exists\, x \in A \mid x \text{ é } par$$
$$\exists|\, x \in A \mid x \text{ é } ímpar$$
$$\nexists x \in A \mid x \text{ é } primo$$

Implicação e Equivalência

Conheça os símbolos

$\Rightarrow$ **Implica**

$\nRightarrow$ **Não implica**

$\Leftrightarrow$ **É equivalente a**

$\nLeftrightarrow$ **Não é equivalente a**

Se for verdade que “todo brasileiro entende de futebol”, então também é verdade que “todo mineiro entende de futebol” pois sabemos que “todo mineiro é brasileiro”. Isto significa que da expressão “todo brasileiro entende de futebol” podemos tirar como conclusão que “todo mineiro entende de futebol”. É obvio que também podemos tirar outras conclusões como todo sergipano entende de futebol ou que todo gaúcho entende de futebol.

Quando de uma afirmação ***a*** podemos tirar uma conclusão ***b***, dizemos que a implica b e indicamos assim:

$$a \Rightarrow b$$

(Lemos: **a implica b ou se a então b**.)

Se também de b podemos concluir a, então dizemos que a e b são equivalentes indicando assim:

$$a \Leftrightarrow b$$

(Lemos: **a é equivalente a b ou a se e somente se b**)

EXEMPLOS

Ex. 1: Sendo x um número inteiro, que pode ser positivo, nulo ou negativo, temos que:

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$$
$$x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$$

Observe que de $x^2 = 4$ não podemos concluir que $x = 2$ porque poderíamos ter $x = -2$. Assim $x^2 = 4$ não implica $x = 2$, logo $x^2 = 4$ não equivale a $x = 2$.

Quando a não implica b, escrevemos:

$$a \not\Rightarrow b$$

(Lemos: **a não implica b**)

Quando a não equivale a b, escrevemos:

$$a \not\Leftrightarrow b$$

(Lemos: **A não equivale a b**)

Vejo outro exemplo.

EXEMPLOS

Ex.1: Imaginemos agora que E é um subconjunto de F e seja x um elemento qualquer.

Observe a figura.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Podemos afirmar que **$x \in E \Rightarrow x \in F$** (Lemos: **se x pertence a E, então x pertence a F**.)

Agora, observe esta situação.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Aqui, podemos afirmar que **$x \notin E \Rightarrow x \notin F$** (Lemos: **se x não pertence a F então x não pertence a E**.)

A afirmativa **$x \notin F$** é a negação lógica de **$x \in F$**. Costumamos representar a negação de uma afirmativa a utilizando um til antes da proposição desta forma **~a** (Lemos: **não a**).

De modo geral, quando **a ⇒ b** (a implica b), também temos que **~b ⇒ ~a** (não b implica não a) e aqui podemos afirmar que vale uma equivalência

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\sim b \Rightarrow \sim a)$$

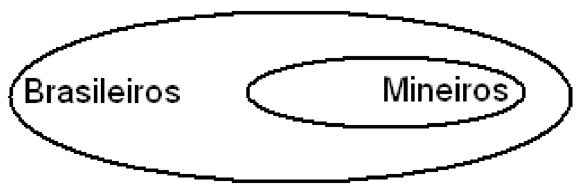
(Lemos: **a implica b é equivalente a não b implica não a**.)

EXEMPLOS

Consideremos as duas afirmativas a seguir:

x é mineiro ⇒ x é brasileiro (Lemos: **Se x é mineiro então x é brasileiro**)

x não é brasileiro ⇒ x não é mineiro (Lemos: **Se x não é brasileiro então x não é mineiro**)



Com os símbolos estudados, podemos escrever definições de subconjunto e da igualdade de conjuntos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

(Lemos: **A está contido em B se, e somente se, para qualquer x temos se x pertence a A então x pertence a B**)

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \mid x \in A \; e \; x \in B$$

(Lemos: **A está contido em B se, e somente se, para qualquer x temos se x pertence a A então x pertence a B**.)

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$$

(Lemos: **A igual a B se, e somente se, A está contido em B e B está contido em A**.)

EXERCÍCIOS

15) Sendo A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}, classifique como verdadeiro ou falso.

(   ) $\forall x \in A$, x é menor que 20.

(   ) $\forall x$, ($x \in A \Rightarrow$ x é um número ímpar).

(   ) $\exists x \in A$ | x é ímpar.

(   ) $\exists| \ x \in A$ | x é par.

(   ) $\exists \ x \in A$ | x é maior que 10.

(   ) $\forall x$, ($x \in A \Rightarrow$ x é maior que 10).

(   ) $\exists x \in A$ | x é é maior que 10.

(   ) $\exists| \ x \in A$ | x é é maior que 10.

(   ) $\exists \ x \in A$ | x é negativo

(   ) $\forall x$, (x é um número ímpar $\Rightarrow x \in A$).

16) Sendo x um número inteiro qualquer, classifique como verdadeiro ou falso:

(   ) $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

(   ) $x = 10 \Rightarrow x^2 = 100$.

(   ) $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$.

(   ) $x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$.

(   ) $x^2 = 100 \Leftrightarrow (x = 10, x = -10)$.

(   ) $A \subset B \Rightarrow B \subset A$

17) Sendo a e b números quaisquer, classifique como verdadeiro ou falso.

(   ) $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

(   ) $a + b = 0 \Leftrightarrow (a = 0, b = 0)$

18) Dê a negação lógica de cada sentença:

a) Existe menina feia.

b) Todo menino gosta de futebol.

c) Nenhuma menina gosta de futebol.

d) Tudo que é bom engorda.

19) Em todo sábado que não chove, Ricardo anda de bicicleta. Se no sábado passado Ricardo andou de bicicleta, o que você pode concluir?

20) Considere a afirmativa a: “Todo aluno que gosta de Matemática, também gosta de poesia”.
a) Qual a negação lógica de a?

b) Se a é verdadeira, o que se pode concluir a respeito de um aluno que não gosta de poesia?

c) Se a é verdadeira e Adriana não gosta de Matemática, pode-se concluir que Adriana não gosta de poesia?

Propriedades da Inclusão

Sabemos que A é subconjunto de B (A $\subset$ B) quando todo elementos de A pertencem também a B. Uma consequência imediata dessa definição é a seguinte propriedade:

$$A \subset A, \forall A$$

(Lemos: A está contido em A, qualquer que seja A)

Suponhamos, agora, que A seja o conjunto vazio, A = $\varnothing$ = { }, e que B seja um conjunto qualquer. É impossível existir um elemento que pertence a A e não pertence a B simplesmente porque A não tem nenhum elemento. Neste caso, nunca poderíamos dizer A $\not\subset$ B, logo, concluímos que A $\subset$ B.

Daí temos uma segunda propriedade:

$$\emptyset \subset B, \forall B$$

(Lemos: **vazio está contido em B, qualquer que seja B**)

Conjunto das Partes

O conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Como consequência das duas propriedades citadas acima, quando vamos escrever os subconjuntos de um conjunto dado, devemos incluir o próprio conjunto e também o conjunto vazio.

EXEMPLOS

Escreva o conjunto das partes do conjunto A = {a, b, c} e a seguir determine a quantidade de elementos desse conjunto.

Com nenhum elemento: $\varnothing$
Com um elemento: {a}, {b}, {c}
Com dois elementos: {a, b}, {a, c}, {b, c}
Com três elementos: {a, b, c} = A

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

O conjunto das partes de A tem 8 elementos.

Chamamos de $P(A)$ o conjunto das partes de A.

A quantidade de elementos do conjunto $P(A)$ é dado por 2^n onde n é q quantidade de elementos de A.

EXERCÍCIOS

21) Dado E = {1, 2, 4, 8}, quantos são os subconjuntos de E?

22) Escreva o conjunto das partes do conjunto E = {1, 2, 4, 8}.

23) Forme o conjunto das partes de:

a) A = {1, 2}

b) B = {3, 6, 9}

c) C = {i, f, m, g}

d) D = { 2 }

24) Quantos elementos tem o conjunto $P(E)$ se E tem:

a) 6 elementos.

b) 8 elementos.

25) Quantos são os subconjuntos do conjunto vazio?

26) Determine o conjunto $P(\emptyset)$

27) Considere a definição:
"O conjunto A está contido propriamente em B quando $A \subset B$ e $A \neq B$. Neste caso dizemos que A é subconjunto próprio de B."
Determine quantos subconjuntos próprios tem:
a) um conjunto de 5 elementos.

b) um conjunto de 10 elementos.

c) um conjunto unitário.

d) o conjunto vazio.

28) Sabendo que {a, b} $\subset$ X e que X $\subset$ {a, b, c, d}, determine os possíveis conjuntos X.

29) Determine os possíveis conjuntos K que satisfazem $\{1\} \subset K$ e $K \subset \{0, 1, 2, 3\}$.

30) Obtenha H tal que
$\{1, 3, 5\} \subset H \subset \{1, 2, 3, 5\}$.

31) Classifique como verdadeiro ou falso:

( ) $\varnothing \subset \{3\}$

( ) $\varnothing \in \{3\}$

( ) $\varnothing \in \{\varnothing, 3\}$

( ) $\varnothing \subset \{\varnothing, 3\}$

( ) $\{3\} \subset \{3\}$

( ) $\{3\} \in \{3\}$

( ) $\{3\} \in \{\varnothing, 3\}$

( ) $\{3\} \subset \{\varnothing, 3\}$

32) Faça um diagrama de Venn representando três conjuntos A, B e C sendo $A \subset B$ e $B \subset C$. O que se conclui a respeito de A e C?

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Pág. 13 – Exercícios 01 a 06

CONECTIVOS E e OU

"A lógica fundamenta os raciocínios e as ações. O pensamento lógico geralmente é criativo e inovador. A cabeça humana é uma máquina notável que não pode e nem deve ser robotizada. O raciocínio lógico lubrifica e torna mais produtivo o pensar em direção ao porvir e dos hábitos da reflexão brotam o aprender." (Jonofon Sérates)

O objetivo do estudo deste assunto é apresentar algumas noções básicas de lógica que, por certo, contribuirão para melhor assimilação dos tópicos que serão vistos nesta e nas próximas aulas.

Vamos começar com as Três Leis do Pensamento. Para que o pensar seja desenvolvido "corretamente" é necessário obedecer as seguintes leis do pensamento:

- **Se qualquer proposição é verdadeira, então, ela é verdadeira. (Princípio da Identidade)**

- **Nenhuma proposição, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa. (Princípio da não-contradição)**

- **Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa. (Princípio do terceiro excluído)**

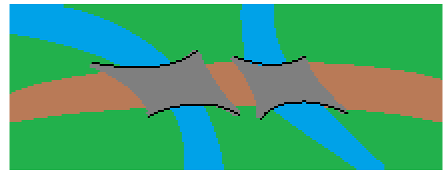
Denomina-se **CONECTIVO** a certas palavras ou frases que, em lógica, são utilizadas para formarem proposições compostas.

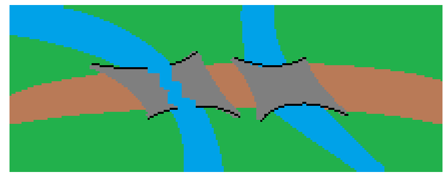
Os conectivos usuais são:

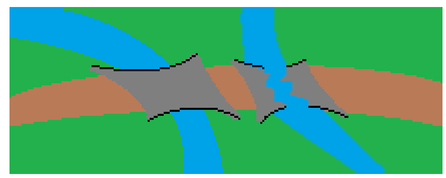
A conjunção "**e**"
A disjunção "**ou**"
A negação "**não**"
O condicional "**se, ... então**"
O bi condicional "**se, e somente se**"

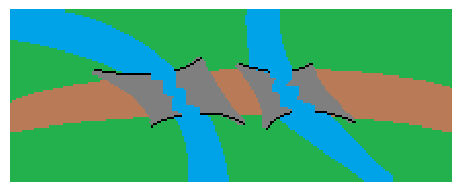
A seguir vamos conhecer os conectivos E e OU e suas respectivas tabelas-verdade. Acompanhe a construção de cada uma dos conceitos associados `um problema simples.

O CONECTIVO "E"







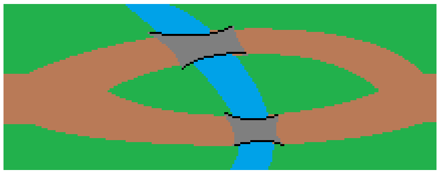


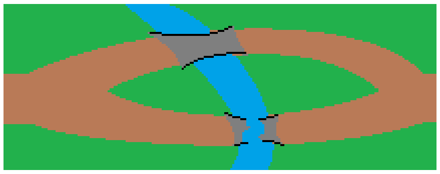
E – TABELA VERDADE

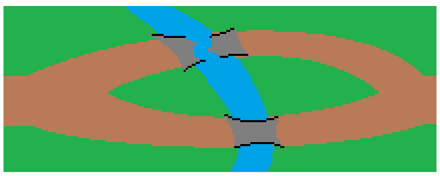
p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

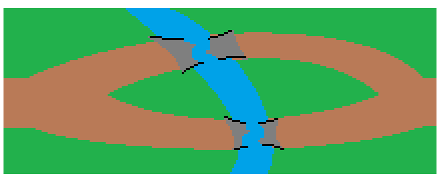
a conjunção "E" retorna verdadeiro se, e somente se, ambas as proposições forem verdadeiras.

O CONECTIVO “OU”









OU – TABELA VERDADE

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

a conjunção “OU” retorna verdadeiro se, ao menos uma das proposições for verdadeira.

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Interseção

Utilizando dois conjuntos dados, A e B, podemos construir outros conjuntos. Por exemplo, se estamos interessados nos elementos que pertencem simultaneamente a ambos os conjuntos, formamos com eles um conjunto chamado INTERSEÇÃO de A e B, que indicamos por $A \cap B$ (lemos: A inter B) e definimos por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; e \; x \in B\}$$

(Lemos: **A inter B é igual a x tal que x pertence a A e x pertence a B**)

EXEMPLOS

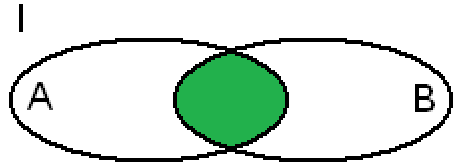
Sendo A = {1, 3, 5, 7, 9, 11} e B = {1, 4, 9, 16}, determine $A \cap B$

Resolução: Para fazer a interseção entre A e B, devemos verificar quais elementos encontram-se nos dois conjuntos ao mesmo tempo. Assim, podemos verificar que os elementos 1 e 9 estão em ambos quanto os demais elementos estão e apenas um conjunto. Assim:

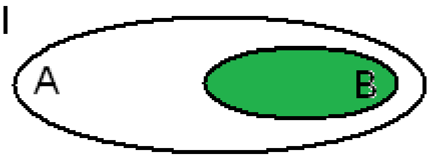
R: $A \cap B = \{1, 9\}$

Sejam dois conjuntos A e B, representados a seguir, vamos marcar a intersecção entre A e B em cada caso:

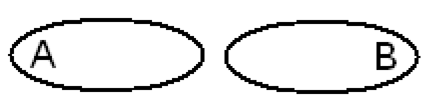
I



II



III



Em cada caso, está sombreada a intersecção entre os conjuntos A e B.

No caso II, vemos que $A \cap B = B$. Isto ocorre porque $B \subset A$.

No III caso, temos que $A \cap B = \varnothing$. Quando isto ocorre, dizemos que A e B são conjuntos **DISJUNTOS**.

Propriedades da Intersecção

A intersecção tem algumas propriedades que podem nos auxiliar em resoluções de problemas.

São as seguintes propriedades que a intersecção de conjuntos admite:

P1: Propriedade comutativa:

$$A \cap B = B \cap A$$

P2: Propriedade associativa:

$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B = \\ = (B \cap C) \cap A$$

P3 Propriedade da Idempotência:

$$A \cap A = A$$

P4: Propriedade distributiva da união com relação à intersecção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

P5 Propriedade distributiva da intersecção em relação à união

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

De acordo com a propriedade P2, quando vamos fazer a intersecção entre três ou mais conjuntos, normalmente o fazemos dois a dois, entretanto não importa quais conjuntos você operou primeiro. Independente da ordem com que você usou, o resultado será sempre o mesmo.

União

O conceito de UNIÃO está intimamente ligado à idéia da disjunção "**OU**".

A união de dois conjuntos A e B é formada por todos os elementos que aparecem em A ou em B, assim, podemos escrever que:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

(Lemos: **A união B é igual a x tal que x pertence a A ou x pertence a B**)

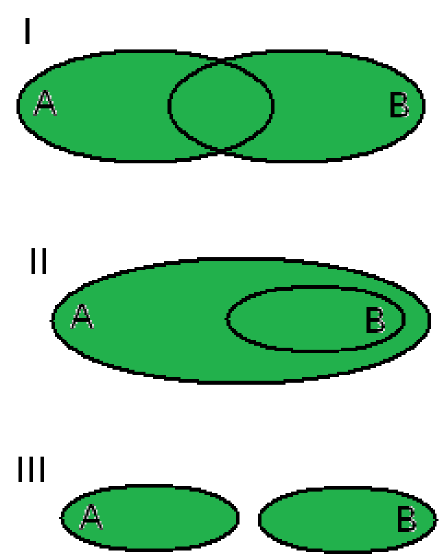
EXEMPLOS

Ex.1: Sendo A = {1, 3, 5, 7, 9, 11} e B = {1, 4, 9, 16}, determine $A \cup B$

Resolução:

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 16\}$$

Sejam dois conjuntos A e B, representados a seguir, vamos marcar a união entre A e B em cada caso:



Em cada caso, está sombreada a união entre os conjuntos A e B.

No caso II, vemos que $A \cup B = A$. Isto ocorre porque $B \subset A$.

Propriedades da União

P1: Propriedade comutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$

(A união B é igual a B união A)

P2: Propriedade associativa:

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = $$
$$= (B \cup C) \cup A$$

P3 Propriedade da Idempotência:

$$A \cup A = A$$

(A união A é igual a A)

P4 Elemento neutro

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

Sobre a segunda propriedade, quando vamos unir três ou mais conjuntos, normalmente o fazemos dois a dois, entretanto não importa quais conjuntos você uniu primeiramente. Independente da ordem com que você usou, o resultado será sempre o mesmo.

EXERCÍCIOS

33) Em cada caso, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

a) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6, 8, 10}

b) A = {l, o, g, i, c, a} e B = {m, a, l, u, c, o}

c) A = {1, 2, 3, 4, 5, ... 50}
e B = {1, 3, 5, 7, ..., 51}

d) A = {1, 2, 3, 4, 5, ... 100}
e B = {2, 4, 6, 8, ... 100}

e) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}
e B = {3, 6, 9, 12, ...}

f) A = {1, 3, 5, 7, 9, ...}
e B = {2, 4, 6, 8, 10, ...}

g) A = { } e B = {p, r, e, t, o}

34) Dados A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = { 3, 6, 9, 12, 15} e C = {0, 5, 10, 15, 20}, determine:

A) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \cap C$

d) $A \cup C$

e) $B \cap C$

f) $B \cup C$

g) $A \cap B \cap C$

h) $A \cup B \cup C$

i) $A \cap (B \cup C)$

j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

k) $A \cup (B \cap C)$

l) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

m) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

35) Sendo A e B conjuntos quaisquer, determine:

a) $A \cap \varnothing$

b) $A \cup \varnothing$

c) $A \cap (B \cup \varnothing)$

d) $A \cap (B \cap \varnothing)$

e) $A \cup (B \cap \varnothing)$

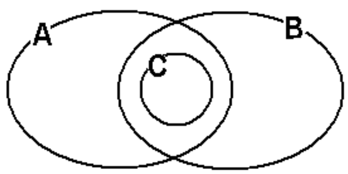
f) $(A \cap \varnothing) \cup (B \cup \varnothing)$

36) Classifique como verdadeiro ou falso, supondo A e B conjunto quaisquer:

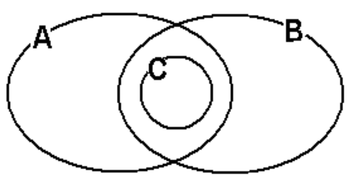
( ) $A \subset (A \cup B)$
( ) $B \subset (A \cup B)$
( ) $(A \cap B) \subset A$
( ) $(A \cap B) \subset B$
( ) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

37) Sombreie, em cada diagrama, a região que indica a expressão correspondente.

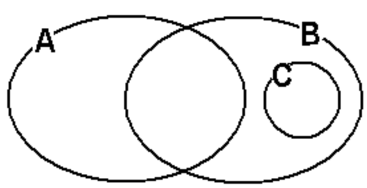
a) $A \cap B \cap C$



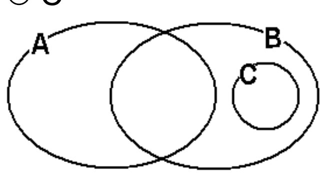
b) $(A \cap B) \cup C$



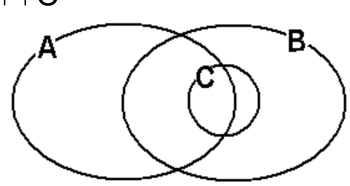
c) $A \cap B \cap C$



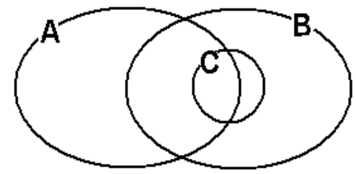
d) $(A \cap B) \cup C$



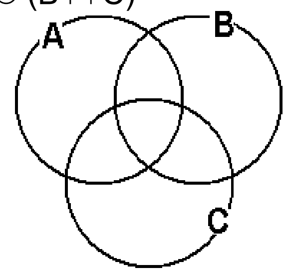
e) $A \cap B \cap C$



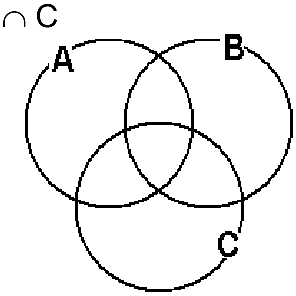
f) $(A \cap B) \cup C$



g) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$



h) $(A \cup B) \cap C$



38) Represente num diagrama de Venn três conjuntos A, B e C tais que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, e $B \cap C \neq \emptyset$,

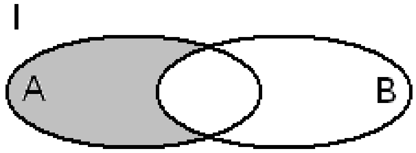
39) Determine o conjunto B sabendo que A = {a, b, c, d , e, f}, A ∩ B = {c, e, f} e A ∪ B = {a, b, c, d, e, f, g, h}.

Diferença de Dois Conjuntos

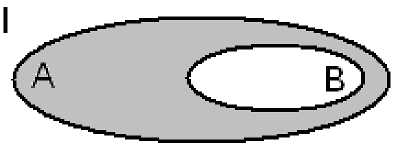
Denominamos diferença entre dois conjuntos A e B ao conjunto formado pelos **elementos que pertencem a A e não pertencem a B**. e indicamos por $A - B$, (lemos: A menos B). Note, novamente, a presença da conjunção **E**. Em termos técnicos, temos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ e \ x \notin B\}$$

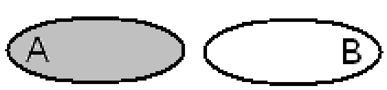
I



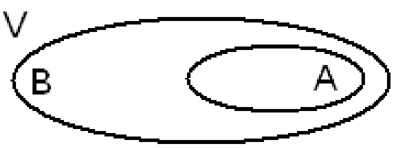
II



III



IV



EXEMPLOS

Consideremos dois conjuntos: A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {0, 2, 4, 6, 8, 10}. Fazer A – B é destacar os elementos que estão em A e que não estão em B. Desta forma, A – B = {1, 3, 5}. Note que os elementos que estão em B não foram incluídos na diferença.

Complementar

Em princípio é necessário destacar que só podemos falar de complementar de B em relação a A quando $B \subset A$

Neste caso a diferença A – B também é chamada de complementar de B em A e indicamos por $C_A B$ (complementar de B em A). Podemos entender como sendo o que falta a B para ficar igual ao A.

Assim:

$$C_A B = A - B \ (sendo \ B \subset A)$$

Geralmente quando vamos tratar de um assunto trabalhamos com elementos que pertencem a um dado conjunto. Este conjunto é chamado de conjunto universo e o representaremos por U. Em um diagrama, costumamos representar o U (universo) por um retângulo.

Sendo A um subconjunto de U, o complementar de A em U é também representado por A^C (Leia: A complementar) ou pelo símbolo Ã (Leia: não A).

Assim,

$$A^C = \tilde{A} = \{x \mid x \in U \ e \ x \notin A\} = U - A$$

(Lemos: A complementar é igual a não A que é x tal que x pertence a U e x não pertence a A)

EXEMPLOS

Considerando o universo do conjunto dos números naturais, podemos dizer que o complementar do conjunto dos números primos são os números não primos ou que o complementar do conjunto dos números pares é o conjunto dos números ímpares.

QUANTIDADE DE ELEMENTOS

Chamamos de $n(A)$ o número de elementos do conjunto A.

O número de elementos da união de dois conjuntos é calculado a partir da quantidade de elementos de cada conjunto e da quantidade de elementos da intersecção destes conjuntos a partir da seguinte fórmula:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Já no caso de diferença de dois conjuntos, a quantidade de elementos de A – B é:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

EXERCÍCIOS

40) Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {0, 1, 3, 4, 5}, determine:
a) A – B

b) B – A

41) Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {0, 1, 2, 3}, determine:
a) A – B

b) B – A

42) Dados A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 3, 4, 5}, determine:
a) A – B

b) B – A

43) Sendo A = {2, 4, 6, 8, 10, ... 40} e B = {1, 2, 3, 4, 5, ... 40}, determine:
a) A – B

b) B – A

44) Sendo A um conjunto qualquer, determine:

a) A – A

b) A – Ø

c) Ø – A

45) Dados M = {1, 2, 3}, N = {1, 2, 3, 4, 5} e P = {2, 3}, determine:

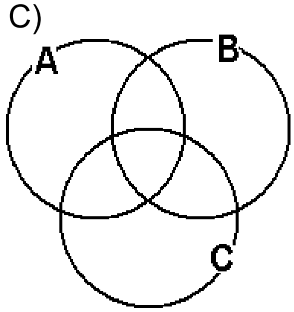
a) $C_N M$

b) $C_N P$

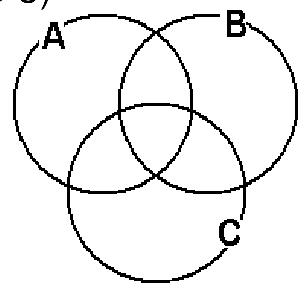
c) $C_M P$

46) Sombreie o conjunto pedido em cada diagrama:

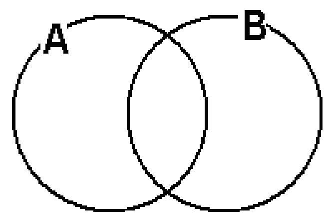
a) A – (B ∩ C)



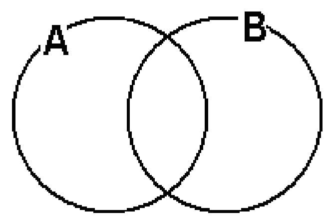
b) A – (B ∪ C)



c) (A – B) ∪ (B – A)



d) (A ∪ B) – (B ∪ A)



47) Denominamos **diferença simétrica** dos conjuntos A e B ao conjunto $A \,\Delta\, B$ dado por:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A).$$

Dados A = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18} e B = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12} determine $A \,\Delta\, B$.

48) Considere no conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} os subconjuntos A = { 2, 3, 5, 7} e B = {1, 3, 5, 7, 9}. Determine:

a) A^C

b) B^C

c) $(A \cup B)^C$

d) $(A \cap B)^C$

49) Classifique como verdadeiro ou falso, supondo que A e B são conjuntos quaisquer de um universo U.

(   ) $A - B = A \cap B^C$

(   ) $A - B^C = A \cap B$

(   ) $A^C - B^C = B - A$

(   ) $(A^C)^C$

(   ) $(A - B)^C = (A \cap B^C)^C = A^C \cup B$.

50) Dois conjuntos A e B são tais que $n(A) = 10$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 5$. Quantos elementos há em $A \cup B$?

EXERCÍCIOS

51) Uma prova de duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. 10 alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira questão e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

52) Numa pesquisa feita com 1000 famílias para se verificar a audiência dos programas de televisão, os seguintes resultados foram encontrados: 510 famílias assistem ao programa A. 305 ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B. 60 assistem aos programas B e C. 25 assistem a A e C e 10 famílias assistem aos três programas.
a) Quantas famílias não assistem nenhum destes 3 programas?

b) Quantas famílias assistem somente o programa A?

c) Quantas famílias não assistem nem ao programa A nem ao programa B?

53) Um professor de Português sugeriu em uma classe a leitura dos livros, HELENA, de Machado de Assis e IRACEMA, de José Alencar. 20 alunos leram Helena, 15 leram só Iracema e 15 não leram nenhum deles.

a) Quantos alunos leram Iracema?

b) Quantos alunos leram só Helena?

c) Qual o número de alunos nessa Classe?

54) Na porta de um supermercado foi realizada uma enquete, com 100 pessoas, sobre três produtos. As respostas foram: 10 pessoas compram| somente o produto A, 30 pessoas compram| somente o produto B, 15 pessoas compram| somente o produto C, 8 pessoas compram A e B, 5 pessoas compram A e C, 6 pessoas compram| B e C e 4 compram o três produtos.

a) Quantas pessoas compram pelo menos um dos três produtos?

b) Quantas pessoas não compram nenhum destes três produtos?

c) Quantas pessoas compram os produtos A e B e não compram C?

d) Quantas pessoas compram o produto A?

e) Quantas pessoas compram o produto B?

f) Quantas pessoas compram os produtos A ou B?

55) Num levantamento entre 100 estudantes sobre o estudo de idiomas, obtivemos os seguintes resultados: 41 estudam inglês, 29 estudam francês e 26 estudam espanhol; 15 estudam francês e inglês, 8 estudam francês e espanhol, 19 estudam inglês e espanhol; 5 estudam os três idiomas.

a) Quantos estudantes não estudam nenhum desses idiomas?

b) Quantos estudantes estudam apenas um desses idiomas?

56) Um entrevista mostrou que 33% dos entrevistados lêem o Jornal A, 29% lêem o jornal B, 22% lêem o jornal C, 13% lêem A e B, 6% lêem B e C, 14% lêem A e C e 6% lêem os três jornais.

a) Quanto por cento não lê nenhum desses jornais?

b) Quanto por cento lê os jornais A e B e não lê C?

c) Quanto por cento lê pelo menos um jornal?

57) Numa pesquisa sobre audiência de TV entre 125 entrevistados, obteve-se: 60 assistem ao canal X, 40 ao canal Y, 15 ao canal Z, 25 assistem a X e Y, 8 assistem a Y e Z e 3 a X e Z e 1 assiste aos três.

a) Quantos não assistem nenhum desses canais?

b) Quantos assistem somente ao canal X?

c) Quantos não assistem nem a X nem a Y?

58) Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de 3 marcas, A, B e C, de um determinado produto resultou em:A, 48%; B, 45%; C, 50%; A e B, 18%; B e C, 25%; A e C, 15%, Nenhum dos três, 5%.

a) Qual a porcentagem dos entrevistados que consomem as três marcas?

b) Qual a porcentagem dos entrevistados que consomem uma e apenas uma das três marcas?

59) Numa pesquisa realizada com 190 pessoas foram anotadas três variáveis relativos a sexo (Masculino ou Feminino), Prática ou não de esportes e uso ou não do tabagismo.
6 homens fumam e praticam esportes. 58 homens não fumam. O número de mulheres que não fumam é igual ao total de homens entrevistados. 30 mulheres são fumantes e dentre as mulheres fumantes, 14 não praticam esportes. Também ficou constatado que 75 pessoas não praticam esportes. Dentre os esportistas, 43 são homens e, no grupo dos não fumantes, 55 não praticam esportes.

a) Monte um diagrama que representa este problema.

b) Quantas são as mulheres esportistas não fumantes?

60) Classifique como Verdadeiro ou Falso

(   ) Se A tem três elementos e B tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 7 elementos.

(   ) Se A tem 2 elementos e B tem 3 elementos, então $A \cap B$ tem 2 elementos.

(   ) Se $A \cap B = \varnothing$, A tem 5 elementos e B tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 9 elementos.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Pág. 16 – Exercícios 07 a 12
Pág. 20 – Exercícios 13, 14 e 15
Pág. 23 – Exercícios 16 a 20

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

O primeiro conjunto numérico que existiu foi o conjunto dos números naturais. Em algumas civilizações primitivas, as necessidades de contagem eram muito rudimentares bastando a numeração que surgiu de forma gradativa e naturalmente que hoje em dia representamos por 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Mais tarde, a ideia de “não existência”, foi representada pelo zero e este número foi acrescentado ao conjunto dos números naturais.

Este conjunto é representado por uma letra N maiúscula com uma dupla barra, como todo conjunto numérico, e você pode ver aqui.

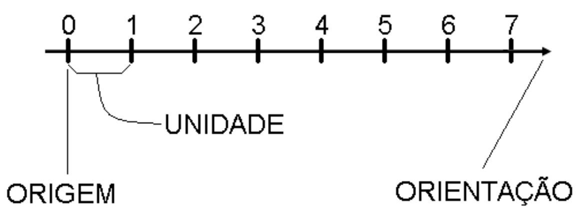
$$\mathbb{N}$$

De forma prática, podemos dizer que os números naturais são os números de contagem mais o zero, assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Reta Numerada

Todos os conjuntos numéricos que estudaremos poderão ser representados geometricamente por meio de uma reta que chamaremos de ***reta numerada***. Sobre esta reta, escolhemos um ponto que servirá de origem e corresponderá ao número zero. Tomaremos também uma unidade medida e uma orientação.



Subconjuntos de $\mathbb{N}$

Veja, nos exemplos abaixo, cinco importantes subconjuntos do conjunto dos números naturais:

EXEMPLOS

1. Conjunto dos números naturais não nulos:
   $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots\}$

2. Conjunto dos números naturais pares:
   $N_P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

3. Conjunto dos números naturais ímpares:
   $N_I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

4. Conjunto dos números naturais primos:
   $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$

5. Conjunto dos números quadrados perfeitos:
   $Q = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \dots\}$

Notação Especial

A presença do asterisco (*) junto a um conjunto representa a ausência do elemento zero, assim:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$
ou seja
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Operação Fechada em um Conjunto

Dizemos que uma operação é fechada em um determinado conjunto quando operamos dois elementos deste conjunto e o resultado também se encontra neste conjunto.

No caso do conjunto dos números naturais, temos que:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}: \begin{array}{l} x + y \in \mathbb{N} \\ x \cdot y \in \mathbb{N} \end{array}$$

Ou seja, a soma e a multiplicação são operações fechadas dentro do conjunto dos números naturais.

EXERCÍCIOS

61) Assinale com V ou F cada assertiva abaixo quando for Verdadeira ou Falsa, respectivamente. A seguir, justifique as afirmativas falsas.

( ) Todo número natural tem um único sucessor.

( ) Números naturais diferentes podem ter sucessores iguais.

( ) Existem algum número natural que não é sucessor de nenhum outro.

( ) Todo número natural tem antecessor natural.

( ) Entre um número natural e seu sucessor, sempre existe outro número natural.

( ) A soma de dois números naturais é sempre outro número natural.

( ) A diferença de dois números naturais é sempre outro número natural.

( ) O produto de dois números naturais é sempre outro número natural.

( ) O quociente de dois números naturais é sempre outro número natural.

( ) Existe um número natural que é maior que todos os números naturais.

( ) Existe um número natural que é menor que todos os outros números naturais.

62) Escreva outros subconjuntos de $\mathbb{N}$ pedidos em cada item abaixo usando a notação tabular:

a) M_6: Conjunto dos múltiplos de 6.

b) D_{72}: Conjunto dos divisores de 72

c) A = Conjunto dos números primos menores que 100.

d) B = Conjunto dos números naturais de dois algarismos}

63) Determine $A \cap B$ e $A \cup B$ sendo

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Como vimos, a soma é uma operação fechada dentro do conjunto dos números naturais, ou seja, a soma de dois números naturais é sempre um número natural. Porém, o mesmo não ocorre com a subtração.

Por exemplo, a operação com números naturais $4 - 7$ não é possível em $\mathbb{N}$. Daí a necessidade de ampliar este conjunto incluindo, agora, os números negativos.

Não é novidade para você que o resultado da operação acima é –3.

Segundo consta no livro do professor Benigno Barreto Filho,

> *"Podemos dizer que os primeiros vestígios de números negativos foram encontrados nos trabalhos de Diofanto de Alexandria por volta do ano de 250 d.C. A idéia de número negativo foi difícil de ser aceita, mas amadureceu com a colaboração de vários matemáticos, principalmente Descartes e Newton"* (Matemática Aula por aula, Barreto F., Benigno, 2000).

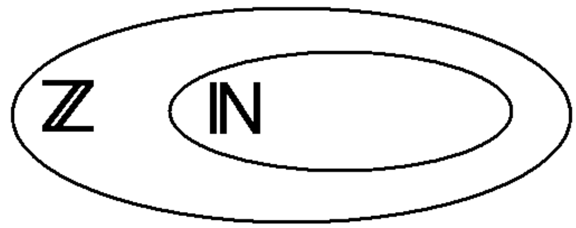
Este conjunto é representado por uma letra Z com dupla barra, veja:

$$\mathbb{Z}$$

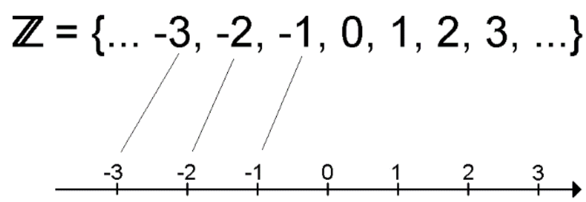
Os números inteiros são compostos pela união entre o conjunto dos números naturais e os números negativos. Assim, temos que:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1\ 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Como vimos, o conjunto dos números inteiros contém todos os números naturais e podemos representar, usando o diagrama de Venn, desta forma:



Na reta numerada, os números inteiros são representados tal qual fazemos com os naturais.



Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Assim como fizemos no conjunto dos números naturais, vamos destacar alguns subconjuntos notáveis dos inteiros.

Conjunto dos números inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{N}$$

Conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots -3, -2, -1, 0\}$$

Conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Números Opostos

No conjunto dos números inteiros, há uma simetria que deve ser considerada. Trata-se da simetria em relação ao zero.

Por exemplo, o simétrico do 3 é o -3. Estes números simétricos são também chamados de **OPOSTOS**.

Todo número inteiro possui seu oposto dentro do próprio conjunto $\mathbb{Z}$.

Valor Absoluto de um Número Inteiro

Como vimos no tópico anterior, para todo inteiro k existe um inteiro –k denominado OPOSTO de k tal que:

$$\boldsymbol{k} + (-\boldsymbol{k}) = \mathbf{0}$$

Quando representamos dois números opostos numa mesma reta numérica, ambos ficam à mesma distância da origem porém situados em lados opostos. Esta distância entre o afixo do ponto e a origem do sistema é chamada de **MÓDULO** (ou **VALOR ABSOLUTO**).

Para todo inteiro k, definimos, então, o módulo de k e representamos por $|\,k\,|$ e lemos: "módulo de k".

EXEMPLOS

O módulo de 7 e o módulo de -7 são iguais a 7. Podemos também, escrever desta forma:

$$|7| = 7 \text{ e } |-7| = 7$$

<u>**OBS.:**</u> Comumente ouvimos falar que o módulo de um número é o próprio número sem sinal porém esta não é a definição correta. O conceito correto de módulo é, como foi dito acima, <u>a distância entre o afixo do ponto e a origem do sistema</u>.

Operações Fechadas em $\mathbb{Z}$

Além da soma e multiplicação temos, agora, o fechamento da subtração, ou seja, a diferença entre dois inteiros, é sempre um número inteiro. O mesmo não podemos dizer da divisão.

EXERCÍCIOS

64) Assinale com V ou F cada assertiva abaixo quando for Verdadeira ou Falsa, respectivamente. A seguir, justifique.

( ) Todo número inteiro tem um único sucessor.

( ) Todo número inteiro tem um único antecessor.

( ) Entre dois números inteiros quaisquer há sempre outro número inteiro.

( ) A soma de dois números inteiros é sempre outro número inteiro.

( ) O simétrico do simétrico de -4 é -4.

65) Preencha as lacunas abaixo com os sinais de $\in$ ou $\notin$.

a) 5 ________ $\mathbb{N}$.

b) $\frac{6}{5}$ ________ $\mathbb{Z}$.

c) -12 ______ $\mathbb{N}^*$.

d) $\frac{1}{4}$ _________ $\mathbb{Z}_-$.

e) 5 _________ $\mathbb{N}_+^*$.

f) $(2+3)$ _________ $\mathbb{N}_+$.

g) $(6-12)$ _________ $\mathbb{Z}_-^*$.

h) -7 _________ $\mathbb{Z}_+$.

66) Determinar, no campo dos inteiros, a solução da equação $4x^2 - x - 3 = 0$.

67) Calcule:

a) $|-12| + |-5|$

b) $|17| - |-2|$

c) $|3 + 11 - 12|$

d) $|-3 + 8 - 15|$

e) | 3 (- 2) + 4 |

f) $|-2(-5) - 16|$

68) Determine os seguintes conjuntos

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = -1\}$

69) Assinale com V ou F cada assertiva abaixo quando for Verdadeira ou Falsa, respectivamente.

a) ( )
$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (m+n) \in \mathbb{Z}$

b) ( )
$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z}$

c) ( )
$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (m \cdot n) \in \mathbb{Z}$

d) ( )
$\forall m, \forall n, (m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{Z}$

70) Complete com =, < ou >.

a) -7 ___ +3

b) 0 ___ -10

c) -2 ___ -9

d) +8 ___ -12

e) | -5 | ___ -5

f) | - 6 | ___ 2 | -3|

g) | -4| ___ | -5|

h) | -8| ___ | 8|

71) Forme os seguintes subconjuntos de Z:

a) $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x > -3 \}$

b) $B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$

c) $C = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$

d) $D = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -8 < x < -3\}$

e) $E = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 0\}$

f) $F = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

O conjunto dos números inteiros é fechado para adição, subtração e multiplicação mas não acontece o mesmo com a divisão. Note que apesar de $(+18) : (-3)$ possuir como solução um número inteiro, o resultado de $(-3) : (+18)$ não pertence a $\mathbb{Z}$. Por esse motivo, fez-se necessária a ampliação do conjunto dos números inteiros e daí surgiu o conjunto dos números racionais.

Também é interessante lembrar que a ideia de medir levou à necessidade de ampliação dos conjuntos dos inteiros. Esta ideia está intimamente ligada à de comparar, ou seja, quantas vezes uma determinada unidade cabe dentro de algo que deve ser medido.

Muitas vezes, a unidade não cabe uma quantidade inteira de vezes na medição e, aí, aparece mais uma vez a necessidade de lidarmos com números fracionários.

Tal qual os conjuntos dos números naturais e inteiros, os racionais possuem um símbolo, trata-se de uma letra Q também com dupla barra

$$\mathbb{Q}$$

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração, ou, em termos técnicos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

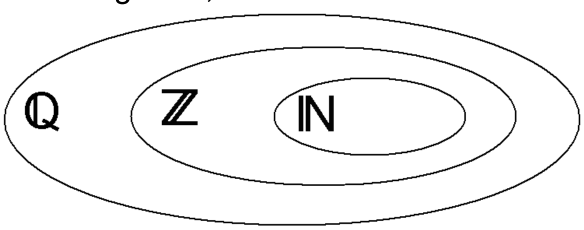
Todo número racional também pode ser escrito na forma de um decimal exato ou não exato desde que periódico.

Subconjuntos de $\mathbb{Q}$

No conjunto dos números racionais, podemos destacar os seguintes sub-conjuntos:

$\mathbb{Q}^*$	Conjunto dos números racionais não nulos.
$\mathbb{Q}_+$	Conjunto dos números racionais não negativos
$\mathbb{Q}_+^*$	Conjunto dos números racionais positivos.
$\mathbb{Q}_-$	Conjunto dos números racionais não positivos.
$\mathbb{Q}_-^*$	Conjunto dos números racionais negativos.

Todo número inteiro ou natural pode ser escrito como um fração com denominador 1, assim, consequentemente, os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Pelo diagrama, temos:



Representação Decimal de Números Racionais

Como está escrito aqui ao lado, todo número racional também pode ser escrito na forma de um decimal exato ou não exato desde que periódico.

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, a representação decimal desse número é obtida dividindo-se a por b podendo resultar em decimais exatos finitos ou periódicos.

EXEMPLOS

Decimais exatos finitos

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad -\frac{5}{8} = -0{,}625$$

$$\frac{9}{50} = 0{,}18 \qquad \frac{7}{1} = 7$$

Dízimas periódicas infinitas

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\frac{177}{990} = 0{,}1787878\ldots = 0{,}1\overline{78}$$

Fração Geratriz

Fração geratriz é a denominação dada à representação fracionária de determinada dízima periódica.

Para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica, podemos seguir algoritmos simples. Na verdade, existem diversos “macetes” para se chegar à fração geratriz e este não é, necessariamente o que você vai achar mais fácil, vale a pena pesquisar e conhecer outros. Quando você estiver no 2º ano, certamente conhecerá outro ao estudar Progressão Geométrica.

EXEMPLOS

Ex.1: Determinar a geratriz de $0{,}666\ldots$

Resolução:

$$x = 0{,}666\ldots$$
$$10x = 6{,}666\ldots$$
$$10x = 6 + 0{,}666\ldots$$
$$10x = 6 + x$$
$$9x = 6$$
$$x = \frac{6}{9}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Resp.: A fração geratriz de $0{,}666\ldots$ é $\frac{2}{3}$.

Ex.2: Determinar a geratriz de $0{,}272727\ldots$

$$x = 0{,}272727\ldots$$
$$100x = 27{,}272727\ldots$$
$$100x = 27 + 0{,}272727\ldots$$
$$100x = 27 + x$$
$$99x = 27$$
$$x = \frac{27}{99}$$
$$x = \frac{3}{11}$$

Resp: $\frac{3}{11}$

Ex.3: Determinar a geratriz de 0,1272727...

Resolução:

$$x = 0{,}1272727\ldots$$
$$10x = 1{,}272727\ldots$$
$$10x = 1 + 0{,}272727\ldots$$

Como vimos no exemplo 2 (acima),

$$0{,}272727\ldots = \frac{3}{11}$$

então

$$10x = 1 + \frac{3}{11}$$
$$10x = \frac{14}{11}$$
$$x = \frac{14}{110}$$
$$x = \frac{7}{55}$$

Resp.: $\frac{7}{55}$

Como vimos no tópico sobre o conjunto $\mathbb{Z}$, entre dois números inteiros, nem sempre existe outro inteiro porém, com o conjunto $\mathbb{Q}$ é diferente pois **entre dois números racionais, sempre existirá outro racional** mas isto não significa dizer que os racionais preencham toda a reta, ou seja, existem números que não são racionais e isto veremos no próximo conjunto numérico.

Agora vamos a alguns exercícios.

EXERCÍCIOS

72) Calcule:

a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{0{,}2 \times 0{,}3}{3{,}2 - 2}$

73) Calcule:

a) $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \div \dfrac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

b) $\dfrac{5-1{,}25\cdot 0{,}2}{(0{,}5)^2+3{,}6\div 18}$

74) Calcule a média aritmética entre os números abaixo:

6,4 8,2 16

75) Determine o valor de:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

76) Coloque em ordem crescente os números $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{6}$ e $\frac{14}{9}$

77) Calcule:
a) 20% de 1250

b) 160% de 450

c) 0,5% de 1200

d) 7,2 % de 10,5

e) 18% de 11,25

f) 12,5 % de 12,5

78) No ano passado, o governo autorizou um aumento de 22% no preço dos remédios porém a indústria resolveu aumentar apenas 80% da taxa autorizada. Responda:
a) Caso a indústria seguisse o aumento autorizado, qual seria o novo preço de um medicamento que originalmente custava $48,20?

b) De acordo com o aumento realizado pela indústria, qual o novo preço de um medicamento que custava $62,50?

c) Qual foi o aumento percentual realizado pela indústria?

d) Após o aumento, um medicamento estava sendo vendido por $47,04. Qual era o preço deste medicamento antes do aumento?

79) Resolva em $\mathbb{Q}$as equações:

a) $\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right)=1-x$

1) $x^4-3x^2+2=0$

80) Calcule o valor da expressão abaixo:

$$\frac{1{,}969696\ldots \cdot (0{,}333\ldots - 0{,}5)}{0{,}454545\ldots + 0{,}4666\ldots}$$

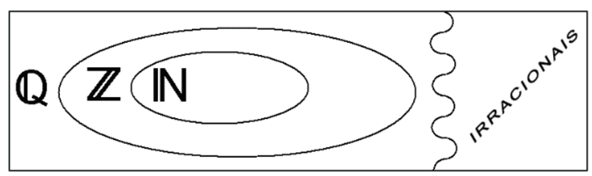
CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Como vimos, há números decimais que podem ser escritos na forma fracionária como numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Estes números são chamados de racionais. Entretanto, existem outros números que **NÃO podem ser escritos sob a forma de fração de termos inteiros**. Estes números são os decimais infinitos não periódicos e são denominados **IRRACIOANAIS**.

EXEMPLOS

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730\ldots$$
$$-\sqrt{3} = -1{,}73205080756\ldots$$
$$\pi = 3{,}1415926535897932\ldots$$

Podemos agora fazer uma representação gráfica envolvendo todos os conjuntos numéricos que já estudamos: Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais.



Até agora, cada conjunto que víamos continha o anterior, mas isto não acontece entre os racionais e os irracionais. Estes dois conjuntos se complementam e formam um novo conjunto chamado de **CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS**.

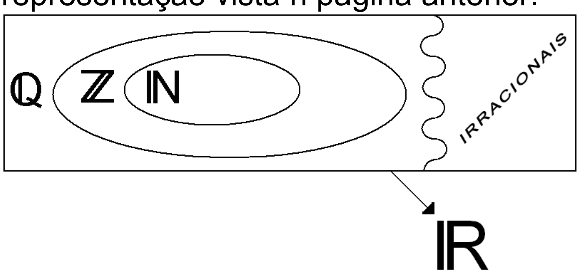
Alguns autores indicam uma letra I, maiúscula e com uma dupla barra para representar conjunto dos números racionais. Assim fica este símbolo?

$$\mathbb{I}$$

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Denominamos **número real** a todo número racional ou irracional. Assim, o conjunto dos números reais, que representaremos por uma letra $\mathbb{R}$, é a união dos racionais ($\mathbb{Q}$) com os irracionais ($\mathbb{I}$).

Desta forma, temos a mesma representação vista n página anterior.



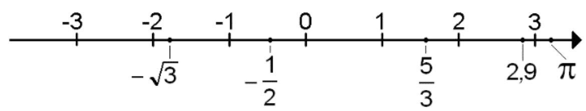
Podemos notar que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Normalmente o conjunto dos números reais é tratado como conjunto universo, nesse caso, o conjunto dos números irracionais é chamado de complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$ ou também de não racionais, assim:

$$\mathbb{I} = \widetilde{\mathbb{Q}}$$

Representação Geométrica de $\mathbb{R}$



Os números reais podem ser representados numa reta de tal modo que todo número real corresponde a um e somente um ponto da reta e a todo ponto da reta corresponde um e somente um número real.

Inverso e Oposto

Todo número real com exceção do zero possui um inverso multiplicativo e um oposto aditivo. (o zero possui apenas o oposto).

O oposto aditivo (ou simplesmente oposto) de um número K é o número $-K$ e podemos dizer que:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists\, (-k) |\ k + (-k) = 0$$

(Lemos: **qualquer que seja k real, existe menos k tal que k mais menos k é igual a zero.**)

O inverso multiplicativo (ou simplesmente inverso) de um número K é o número $\frac{1}{k}$ e podemos dizer que:

$$\forall k \in \mathbb{R}^*, \exists \left(\frac{1}{k}\right) \mid k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

(Lemos: **qualquer que seja k real não nulo, existe um sobre k tal que k vezes um sobre k é igual a um.**)

EXERCÍCIOS

81) Preencha as lacunas em cada item com $\in$ ou $\notin$:

a) $0{,}4$ ________ $\mathbb{Z}$

b) $\sqrt{2}$ ___________ $\mathbb{Q}$

c) $0{,}343434\ldots$ ___________ $\mathbb{Q}$

d) -1 ___________ $\mathbb{R}^*$

e) $\sqrt{16}$ ___________ $\mathbb{Q}$

f) $0{,}123456789101112\ldots$ ___________ $\mathbb{Q}$

g) $\frac{16}{8}$ ___________ $\mathbb{Z}$

h) 4 ___________ $\mathbb{Q}$

i) $\sqrt{-2}$ ___________ $\mathbb{R}$

j) π ___________ $\mathbb{R}$

k) $3{,}18$ ___________ $\tilde{\mathbb{Q}}$

l) $\frac{1}{3}$ ___________ $\mathbb{Q}$

82) Determine o inverso e o oposto em cada item abaixo:

a) 7

b) -6

c) $\frac{2}{3}$

d) $\sqrt{5}$

e) $1 - \sqrt{2}$

f) $2\sqrt{6}$

83) Representar os seguintes conjuntos por extensão de seus elementos (representação tabular):

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 6\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} |\ 2x - 1 = 7\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z}^* |\ x^2 - 2x = 0\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

84) Assinale com V ou F cada assertiva abaixo quando for Verdadeira ou Falsa, respectivamente. Justifique as falsas.

( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

( ) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{N}$

( ) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$

( ) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}$

( ) $\mathbb{Z}_- \not\subset \mathbb{Z}$

( ) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

( ) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

( ) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+$

( ) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}$

( ) $\mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{R}$

85) Qual valor obtemos quando simplificamos a expressão abaixo?

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

86) Observe estes 9 números:

$$\begin{array}{ccc} -4 & \dfrac{1}{3} & 0{,}888\ldots \\ \sqrt{6} & 0 & -1\dfrac{3}{5} \\ 4{,}86 & 8 & \pi \end{array}$$

Dentre eles, quais são:
a) Naturais

b) Inteiros

c) Racionais

d) Irracionais

e) Reais

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Pág. 34 – Exercícios 21 a 25

Comparação de Números Reais

Dados dois números reais **a** e **b**, uma das três sentenças seguintes é verdadeira:

$$a = b$$
$$a > b$$
$$a < b$$

Daí temos também que:

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$
$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$
$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Destas afirmações, podem os concluir que o conjunto dos números reais é ordenável e, daí, podemos extrair intervalos.

Intervalos Reais

O conjunto dos números reais possui subconjuntos denominados **intervalos reais** que são determinados por desigualdades como veremos agora.

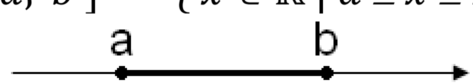
Para todas as situações a seguir, vamos considerar dois números reais **a** e **b** com a < b.

1. Intervalo aberto de extremos **a** e **b**.

$$]\,a;\ b\,[\, = \{\,x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\,\}$$

2. Intervale fechado de extremos **a** e **b**.

$$[\,a;\ b\,] = \{\,x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\,\}$$



3. Intervalo aberto à direita (ou fechado à esquerda) de extremos **a** e **b**.

$$[\,a;\ b\,[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\,\}$$

4. . Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos **a** e **b**.

$$]\,a;\ b\,] = \{\,x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\,\}$$

Existem ainda, os intervalos indicados pelo infinito (∞).

5. $]-\infty, a] = \{\,x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

6. $]-\infty, a[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

7. $[\,a, +\infty[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

8. $]\,a, +\infty[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Obs.:

- Os números **a** e **b** são denominados extremos dos intervalos.
- O intervalo é sempre **aberto** na notação de infinito.
- Podemos utilizar ( ) para indicar extremidade aberta nos intervalos

$[a;\ b[= [a;\ b)$, $]a;\ b] = (a;\ b]$ e $]a;\ b[= (a;\ b)$.

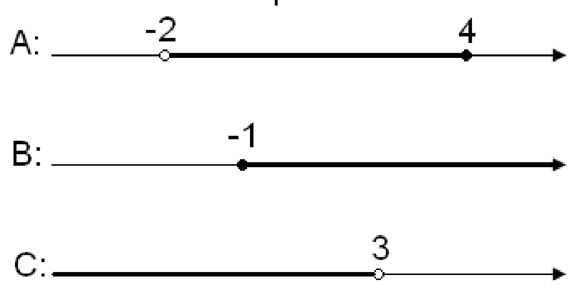
Operações com Intervalos Reais

EXEMPLOS

Dados os intervalos:

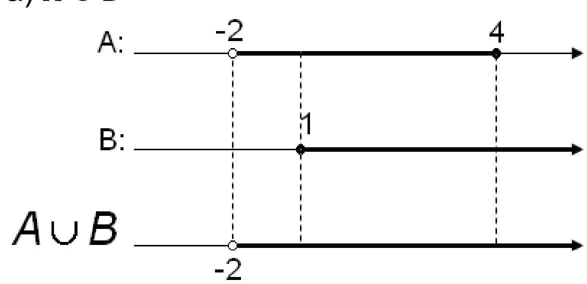
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$
$$C =]-\infty;\ 3[$$

Podemos representar:



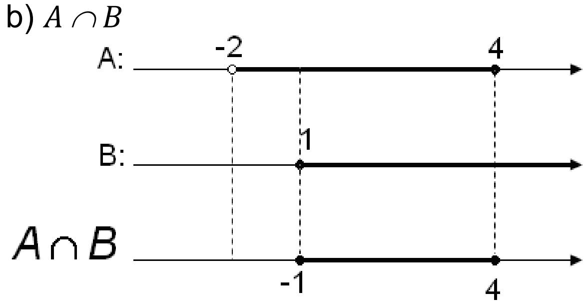
Daí temos:

a) $A \cup B$



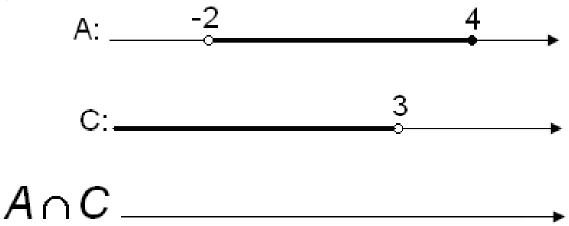
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$

b) $A \cap B$



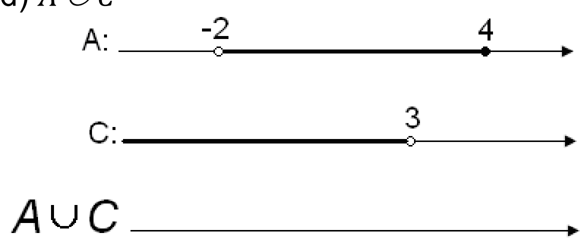
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

c) $A \cap C$

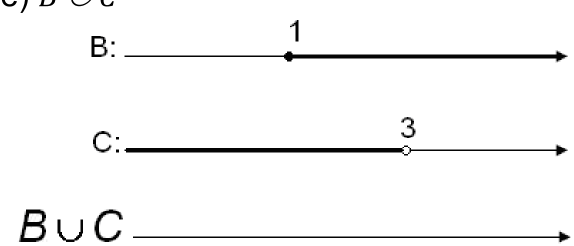


$A \cap B \ = \ \{ x \in \mathbb{R} \mid \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

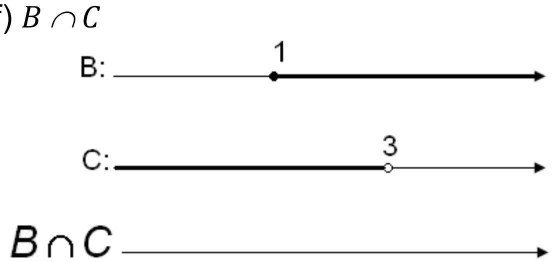
d) $A \cup C$



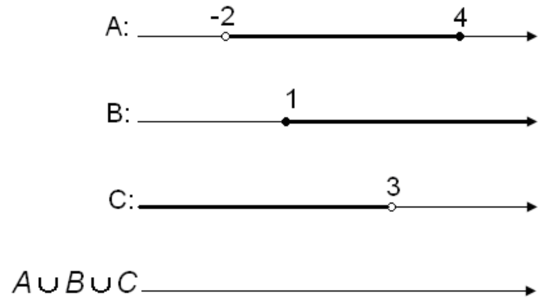
e) $B \cup C$



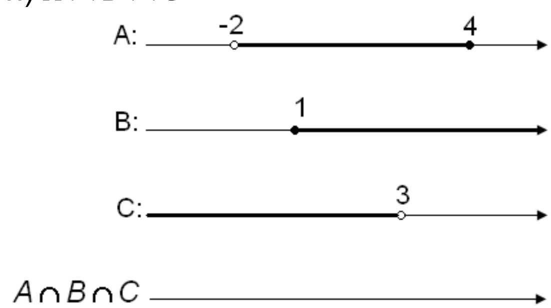
f) $B \cap C$



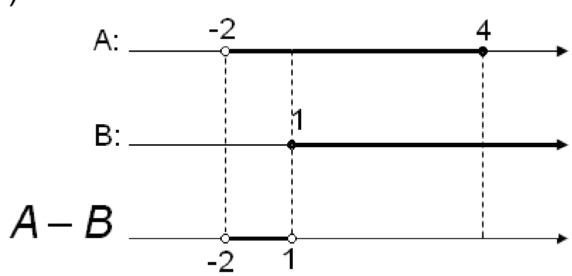
g) $A \cup B \cup C$



h) $A \cap B \cap C$

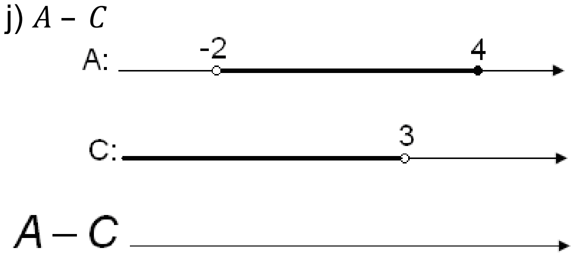


i) A – B



$A - B \ = \ \{ x \in \mathbb{R} \mid \ -2 \ < \ x \ < \ 1 \}$

j) $A - C$



EXERCÍCIOS

87) Faça a representação gráfica e a notação de intervalo para cada conjunto real abaixo:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{3} \leq x < 6\}$

88) Descreva cada um dos conjuntos pela notação característica de seus elementos:

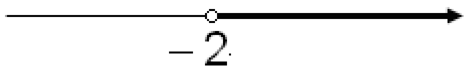
a) $A = \left[-5, \frac{5}{3}\right]$

b) $B = \left]-\infty, -2\right[$

c) $C = \left]3, +\infty\right[$

d) D:

e) E:



89) Determine $L \cup M$ e $L \cap M$ sendo:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \; ou \; x \geq 2\}$$
$$M =]-3, 3[$$

$L \cup M$

$L \cap M$

90) Determine a união e a intersecção dos seguintes intervalos:

a) $[1;\ 3]\ e\ [2;\ 5]$

b) $]-1;\ 4]\ e\ [3;\ 7]$

c) $]2;\ 4[\ e\ [1;\ 3[$

d) $[-5;\ 5]\ e\ [0, 3[$

e) $]-\infty, 1]\ e\ [1, 3]$

f) $\left[-\frac{1}{3}; 4\right[$ e $\left[-\frac{3}{7};\ \sqrt{15}\right]$

g) $[-\infty;\ \sqrt{8}[$ e $[0; 9{,}2]$

h) $\left[-\frac{5}{2};\ +\infty\right)$ e $[-2{,}5; 2{,}5]$

91) Seja A o conjunto de todos os números múltiplos de 6 e B o conjunto de todos os números múltiplo de 8. Qual a característica do conjunto C obtido da intersecção de A e B?

92) Determine A ∩ B em cada caso:

a) $A\ =\ [-3;\ 3]\ e\ B\ =\ [0;\ 6]$

b) $A\ =]1;\ 7[\ e\ B\ =]2;\ 5[$

c) $A\ =]-\infty;\ -1]\ e\ B\ =\ 2-;\ +\infty[$

d) $A\ =\ [1;\ 4]\ e\ B\ =\ [4;\ 9]$

93) Em cada caso da questão anterior, determine A ∪ B:

a) $A = [-3;\ 3]\ e\ B = [0;\ 6]$

b) $A =]1;\ 7[\ e\ B =]2;\ 5[$

c) $A =]-\infty;\ -1]\ e\ B = 2-;\ +\infty[$

d) $A = [1;\ 4]\ e\ B = [4;\ 9]$

94) Em cada caso da questão 92, determine A – B:

a) $A = [-3;\ 3]\ e\ B = [0;\ 6]$

b) $A =]1;\ 7[\ e\ B =]2;\ 5[$

c) $A =]-\infty;\ -1]\ e\ B = 2-;\ +\infty[$

d) $A = [1;\ 4]\ e\ B = [4;\ 9]$

95) Sendo $M = [0;\ 3]$ e $G = [7;\ 9]$, determine:

a) $M \cap G$

b) $M \cup G$

c) $M - G$

d) $\mathbb{R} - G$

Propriedades das Desigualdades

Em todos os casos, vamos considerar os números reais a e b quaisquer com **a < b** e o número real qualquer **c**.

Propriedade **P1**.

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c, \forall\, c \in \mathbb{R}$$

Em palavras, podemos dizer que somando um mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, ela não se altera.

Propriedade **P2**.

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \forall\, c > 0$$
$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \forall\, c < 0$$

Podemos dizer que multiplicando os dois lados de uma desigualdade por um mesmo número positivo, ela não vai alterar e multiplicando os dois lados da desigualdade por um mesmo número negativo, a desigualdade inverte.

EXERCÍCIOS

96) Resolva, no campo dos reais, as seguintes inequações:

a) $5x - 20 > 0$

b) $-4x + 32 > 0$

c) $-3x + 8 < 6x + 2$

d) $5x + 2(x - 1) > 3$

e) $3x - 4(1 - x) \leq 2 - x$

f) $3(x - 1) - 2(1 - x) \geq 0$

97) Determine o intervalo real que satisfaz, simultaneamente as duas inequações abaixo:

$$4x - 3 < 6x + 7$$
$$3(x - 2) > 2x + 4$$

(Dica: resolva independentemente cada uma das inequações e em seguida, faça a intersecção das soluções)

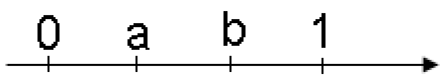
98) Assim como foi feito na questão anterior, determine o intervalo real que satisfaz, simultaneamente as duas inequações:

a) $5 \leq 3x + 4$ e $6x + 1 < 4x + 7$

b) $3 - 2x \leq 1$ e $3x - 1 \leq 5$

99) Se $x = 1{,}333...$ e $y = 0{,}1666...$, então quanto valo $x + y$?

100) Na reta real da figura estão representados os pontos 0, a, b e 1. Localize o ponto P sabendo que $P = \frac{b}{a}$.



101) Cada número real da 1ª coluna pertence um intervalo da segunda coluna. Associe corretamente:
(utilize o espaço em branco na coluna ao lado para fazer as contas)

a)	$\frac{4}{3} - \frac{11}{6}$	( )	$(-\infty, -5]$
b)	$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$	( )	$(-5, -1)$
c)	$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$	( )	$[-1, 2)$
d)	$-\sqrt{48}$	( )	$[2, 7]$
e)	$\pi - \sqrt{2}$	( )	$(7, +\infty)$

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Pág. 36 – Exercícios 26 a 28
Pág. 37 a 39 – Exercícios 1 a 18

RESPOSTAS

01) a) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
b) B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
c) C = {abril, junho, setembro, novembro}
d) D = { Lua }
e) E = {EUA, México, Canadá}
f) F = { Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Setembro, Outubro, Novembro, Dezembro}

02) Unitários: A e D
Vazios: B, E, F e G

03) V F F V F V V F F V

04) a) $\in$ b) $\notin$ c) $\in$ d) $\notin$

05) a) $\notin$ b) $\in$ c) $\notin$ d) $\in$

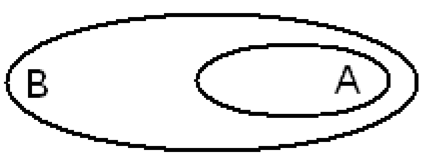
06) V V F F

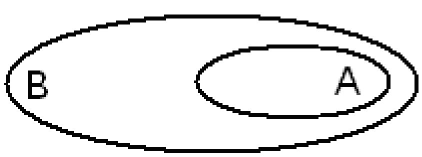
07) A_1 = {a, e, i}; A_2 = {a, e, o}; A_3 = {a, e, u}; A_4 = {a, i, o}

08) A_1 = {1, 2}; A_2 = {1, 3}; A_3 = {1, 4}; A_4 = {2, 3}; A_5 = {2, 4}; A_6 = {3, 4}

09) V F V F V F
F V F V V V

10) V V V F V

11) 

12) 

13) Existe aluno do IFMG que não é inteligente.

14) II I III

15) V F V V V F F F F F

16) V V F F V F

17) V F

18) a) Nenhuma menina é feia
b) Existe menino que não gosta de futebol.
c) Existe menina que gosta de futebol.
d) Nem tudo que é bom engorda.

19) Sábado passado choveu.

20) a) Existe aluno que gosta de matemática e não gosta de poesia.
b) Que o aluno não gosta de poesia.
c)Não.

21) 16

22) P(E) = { Ø, {1}, {2}, {4}, {8}, {1, 2}, {1, 4}, {1, 8}, {2, 4}, {2, 8}, {4, 8}, {1, 2, 4}, {1, 2, 8}, {1, 4, 8}, {2, 4, 8}, {1, 2, 4, 8}}

23) a) P(A) = { Ø, {1}, {2}, {1, 2}}
b) B = { Ø , {3}, {6}, {9}, {3, 6}, {3, 9}, {6, 9}, {3, 6, 9}}
c) P(C) = { Ø, {i}, {f}, {m}, {g}, {i, f}, {i, m}, {i, g}, {f, m}, {f, g}, {m, g}, {i, f, m}, {i, f, g}, {i, m, g}, {f, m, g}, {i, f, m, g}}
d) P(D) = { Ø, {2} }

24) a) 64 b) 256

25) 1

26) P{Ø} = {Ø}

27) a) 31 b) 1023
c) 1 d) nenhum

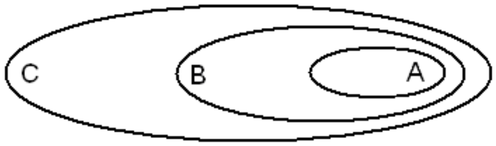
28) {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, c, d}

29) {1}; {0, 1}; {1, 2}; {1, 3}; {0, 1, 2}; {0, 1, 3}; {1, 2, 3}; {0, 1, 2, 3}

30) {1, 3, 5} ou {1, 2, 3 5}

31) V F V V V F V F

32)



$A \subset C$

33)

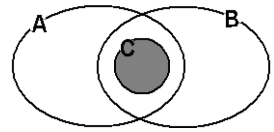
	$A \cup B$	$A \cap B$
a)	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}	{2, 4, 6}
b)	{l, o, g, i, c, a, m, u}	{a, c, l, o}
c)	{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ... 49}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... 41}
d)	{1, 2, 3, 4, 5, 6, ... 100}	{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... 100}
e)	A	B
f)	N	Ø
g)	B	A

34) a) $A \cap B$ = {6, 12}
b) $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15}
c) $A \cap C$ = {10}
d) $A \cup C$ = {0, 2, 4, 5, 6, 8,10, 12, 15, 20}
e) $B \cap C$ = {15}
f) $B \cup C$ = {0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20}
g) $A \cap B \cap C = Ø$
h) $A \cup B \cup C$ = {0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20}
i) $A \cap (B \cup C)$ = {6, 10, 12}
j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ = {6, 10, 12}
k) $A \cup (B \cap C)$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 15}
l) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 15}
m) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$ = {6, 12}

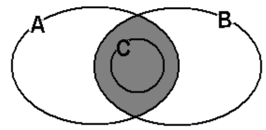
35) a) $A \cap Ø = Ø$
b) $A \cup Ø = A$
c) $A \cap (B \cup Ø) = A \cap B$
d) $A \cap (B \cap Ø) = Ø$
e) $A \cup (B \cap Ø) = A$
f) $(A \cap Ø) \cup (B \cup Ø) = B$

36) V V V V V

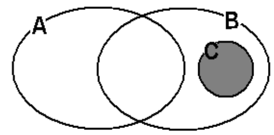
37) a)



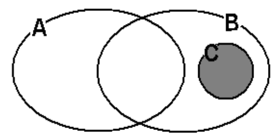
b)



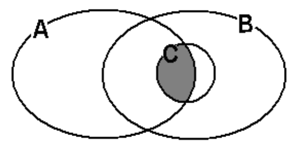
c)



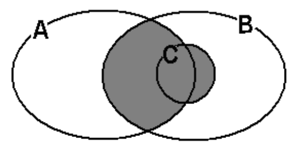
d)



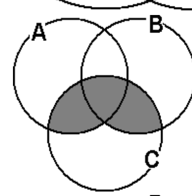
e)



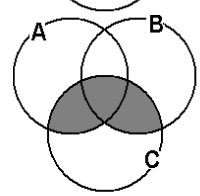
f)



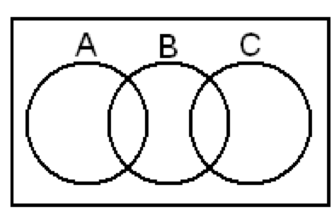
g)



h)



38)



39) B = {c, e, f, g, h}

40) a) A – B = { 2 }   b) B – A = { 0, 5}

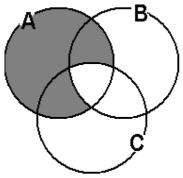
41) a) A – B = { 4 } b) B – A = { 0 }

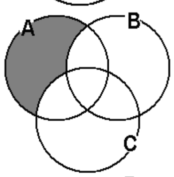
42) a) A – B = { 2 } b) B – A = {4, 5}

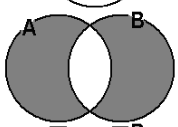
43) a) A – B = { }
b) B – A = {1, 3, 5, 7, 9, ... 39}

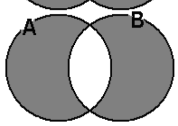
44) a) Ø b) A c) Ø

45) a) $C_N M$ = { 4, 5 }
b) $C_N P$ = { 1, 4, 5}
c) $C_M P$ = { 1 }

46) a) 

b) 

c) 

d) 

47) A ∆ B = {2, 3, 4, 8, 9, 10, 15, 18}

48) a) A^C = {1, 4, 6, 8, 9, 10}
b) B^C = { 2, 4, 6, 8, 10}
c) $(A \cup B)^C$ = {1 ,2 ,4, 6, 8, 9, 10}
d) $(A \cap B)^C$ = {4, 6, 8, 10}

49) V V V V V

50) 17

51) 5 alunos

52) a) 54 famílias
b) 315 famílias
c) 365 famílias

53) a) 25 alunos
b) 10 alunos
c) 50 alunos

a) 66 pessoas

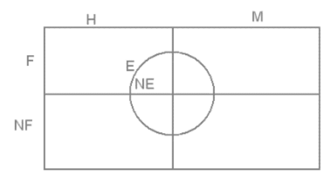
54)
b) 34 pessoas
c) 4 pessoas
d) 19 pessoas
e) 40 pessoas
f) 51 pessoas

55) a) 41 estudantes
b) 27 estudantes

56) a) 43%
b) 7 %
c) 57%

57) a) 45 entrevistados
b) 33 entrevistados
c) 50 entrevistados

58) a) 10%
b) 57%

59) a) 

b) 6

60) F F V

61) V F V F F V
F V F F V

62) a) M_6 = {0, 6, 12, 18, 24, ...}
b) D_{72} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}
c) A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}
d) B = {10, 11, 12, 13, ..., 98, 99}

63) $A \cap B$ = {2, 3, 4, 5}
$A \cup B$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

64) V V F V V

65) ∈ ∉ ∉ ∈ ∈ ∈ ∈ ∉

66) S = { 1 }

67) a) 17 b) 15 c) 2
d) 15 e) 10 f) 6

68) a) {-4, 4} b) {{-1, 1}
c) {0} d) ∅

69) V V V F

70) a) < b) > c)>
d) > e) > f) =
g) < h) =

71) A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
B = {..., -4, -3, -2}
C = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}
D = {-7, -6, -5, -4}
E = {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0}
F = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,}

72) a) $-\frac{1}{15}$ b) 0,05

73) a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{95}{9}$

74) 10,2

75) $\frac{18}{13}$

76) $\frac{14}{9} < \frac{7}{4} < \frac{11}{6}$

77) a) 250 b) 720
c) 6 d) 0,756
e) 2,025 f) 1,5625

78) a) \$58,80 b) \$73,50
c) 17,6% d) \$40,00

79) a) S = {3} b) S = {-1, 1}

80) $-\frac{325}{1012}$

81) $\notin \quad \notin \quad \in \quad \in \quad \in \quad \notin$
$\in \quad \in \quad \notin \quad \in \quad \notin \quad \in$

82) a) $\frac{1}{7} e -7$ b) $-\frac{1}{6}$ e 6
c) $\frac{3}{2}$ e $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $-\sqrt{5}$

82) **(cont.)** e) $-1-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}-1$ f) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ e -

83) a) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
b) B = {-3, -2, -1, 0, 1, 2}
c) C = { 4 } d) D = { 2 }
e) E = ∅

84) V F V V F V V V F V

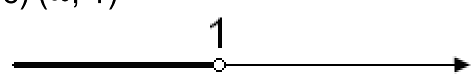
85) $\sqrt{2}$

86) a) 0 e 8
b) -4, 0 e 8
c) -4, $\frac{1}{3}$, 0,888..., 0, $-1\frac{3}{5}$,4,86 e 8
d) $\sqrt{6}$ e π
e) todos

87) a)]-1; 3]

b) [2; 6]

c) (∞; 1)



d) [$\sqrt{3}$; 6)

88)
$A = \left\{x \in \Re \mid -5 \le x < -\frac{5}{3}\right\}$
$B = \{x \in \Re \mid x < -2\}$
$C = \{x \in \Re \mid x > 3\}$
$D = \{x \in \Re \mid x \le -2\sqrt{3} \;\; ou \;\; x > 0\}$
$E = \{x \in \Re \mid x > -2\}$

89) L ∪ M = $\Re$
L ∩ M = $]-3;-1[\cup [2;3[$

90)

91) É o conjunto formado por todos os múltiplos de 24.

92) a) [0; 3] b)]2; 5[
c) [-; 3] d) [4]

93) a) [-3; 6] b)]1; 7[
c) R d) [1; 9]

94) a) [-3; 0[b)]1; 2] $\cup$ [5; 7[
c)]-∞, -2[d) [1; 4[

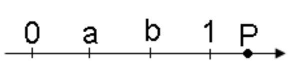
95) a) $\varnothing$ b) [0; 3] $\cup$ [7; 9]
c) [0; 3] d)]- ∞; 7] $\cup$ [9; +∞[

96) a) S = $\{x \in \Re \mid x > 4\}$
b) S = $\{x \in \Re \mid x < 8\}$
c) S = $\left\{x \in \Re \mid x > \frac{2}{3}\right\}$
d) S = $\left\{x \in \Re \mid x > \frac{5}{7}\right\}$
e) S = $\left\{x \in \Re \mid x \leq \frac{3}{4}\right\}$
f) S = $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$

97) $S = \left\{x \in \Re \mid -5 < x < \frac{2}{5}\right\}$

98) a) $S = \left\{x \in \Re \mid \frac{1}{3} \leq x < 3\right\}$
b) $S = \{x \in \Re \mid 1 \leq x \leq 2\}$

99) $\frac{3}{2}$

100) 

101) d a e b c

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANTE, Luiz Roberto; Matemática. São Paulo, Ática, 2004.

MACHADO, Antônio dos Santos; Matemática, Temas e Metas. Atual, 1988.

Links para os vídeos sugeridos

Links dos vídeos sugeridos nesta apostila

Página 15

http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-conceitos

Página 31

http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-operacoes

Página 38

http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-numericos-p1

Página 44 (Esquerda)

http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-numericos-p2

Página 44 (direita)

http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/conjuntos-numericos-p3

Página 50

http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/operacoes-com-intervalos

Símbolos estudados nesta apostila

$\in$	**Pertence a** ou **é elemento de**
$\notin$	**Não pertence a** ou **não é elemento de**
$\subset$	**Está contido**
$\not\subset$	**Não está contido**
$\supset$	**Contém**
$\forall$	**Qualquer que seja**
$\exists$	**Existe**
$\exists\vert$	**Existe um único**
$\nexists$	**Não existe**

$\Rightarrow$	**Implica**
$\not\Rightarrow$	**Não implica**
$\Leftrightarrow$	**É equivalente a**
$\not\Leftrightarrow$	**Não é equivalente a**
$\vert$	**Tal que**
$C_A B$	**Complementar A em B**
$\mathbb{N}$	**Conjunto dos números Naturais**
$\mathbb{Z}$	**Conjunto dos números Inteiros**
$\mathbb{Q}$	**Conjunto dos números Racionais**
$\mathbb{R}$	**Conjunto dos números Reais**