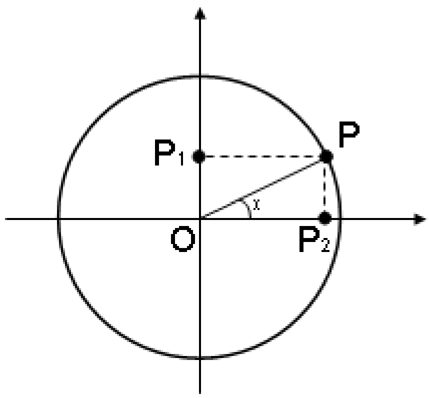
ÍNDICE

No final das séries de exercícios podem aparecer sugestões de atividades complementares. Estas sugestões referem-se a exercícios do livro “Matemática” de Manoel Paiva fornecido pelo FNDE e adotado pelo IFMG – Campus Ouro Preto durante o triênio 2015-2017.

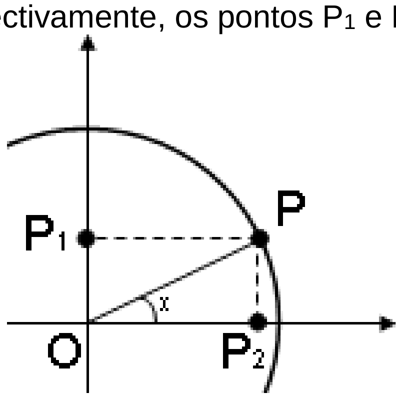
Todos os exercícios sugeridos nesta apostila se referem ao volume 2.

INTRODUÇÃO

Seja x um ângulo de tal forma que o arco correspondente a ele possua extremidade em P. Unindo O a P, obtemos o arco OP.



Projetando o ponto P nos eixos vertical e horizontal, obtemos, respectivamente, os pontos P_1 e P_2.



Esta figura é um recorte da figura acima.

Consideremos o triângulo retângulo OP_2P. Sobre o ângulo x, podemos afirmar que:

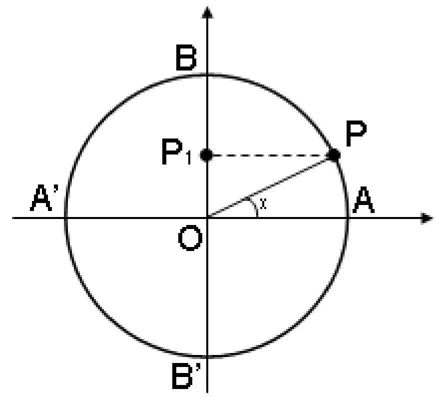
$$\operatorname{sen} x = \frac{PP_2}{OP} \text{ e } \cos x = \frac{OP_2}{OP}$$

O lado OP é a hipotenusa e tem comprimento igual a 1 (um). O lado PP_2 tem comprimento igual a OP_1. Desta forma, fazendo as devidas substituições, podemos reafirmar sobre x que;

$$\operatorname{sen} x = OP_1 \text{ e } \cos x = OP_2$$

FUNÇÃO SENO

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo.



Denominamos SENO de x a ordenada P_1 do ponto P em relação ao sistema cartesiano.

Denominamos *função seno* a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real OP_1 = sen x, isto é:

$$f(x) = \text{sen } x$$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO SENO

1	A imagem da função seno é o intervalo [1; 1], isto é: $-1 \leq sen\, x \leq 1$ Isto pode ser verificado facilmente pois como o ponto P pertence ao ciclo de raio 1 e centro na origem, sua ordenada fica limitada ao intervalo [1; 1]

2 Se x é um arco do primeiro ou segundo quadrante, então sen x é positivo.

Esta propriedade também pode ser verificada notando que quando x está entre 0 e π rad, a sua imagem no ciclo está acima do eixo horizontal.

3 Se x é um arco do terceiro ou quarto quadrante, então sen x é negativo.

Esta propriedade também pode ser verificada notando que quando x está π rad e 2π rad, a sua imagem no ciclo está abaixo do eixo horizontal.

4 Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrantes então f(x) = sen x é crescente.

Note que se x percorre o primeiro quadrante, o ponto P percorre o arco AB e sua ordenada "sobe" de 0 até 1. Situação semelhante ocorre no quarto quadrante percorrendo o arco B'A e a ordenada varia de -1 a 0.

5 Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrantes então f(x) = sen x é decrescente.

Note que se x percorre o segundo quadrante, o ponto P percorre o arco BA' e sua ordenada desce de 1 até 0. Situação semelhante ocorre no terceiro quadrante variando, neste caso, de 0 a -1.

6 A função f(x) = sen x é periódica de período 2π.

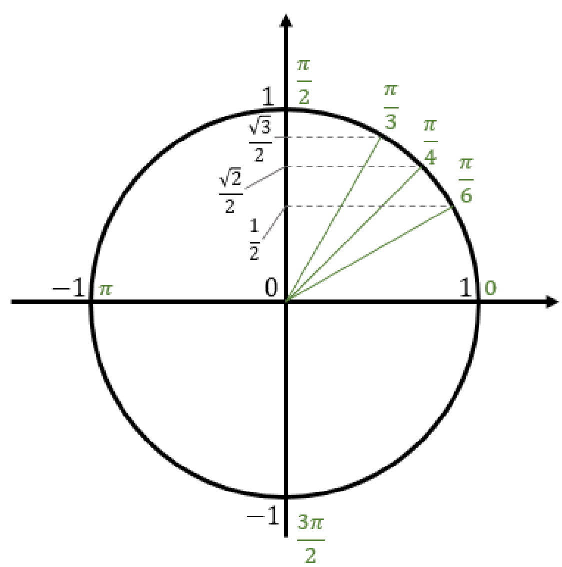
Dado um número real x qualquer, sabemos que sen x = sen (x + 2π) assim, concluímos que a cada 2π, a função seno se repete.

SENO DE ARCOS NOTÁVEIS

Da trigonometria no triângulo retângulo, sabemos que:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \text{sen}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{e}\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

observe estes valores destacados no ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos notar também que $\text{sen}\,\frac{\pi}{2}=1$, $\text{sen}\,\pi=0$, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}=-1$ e $\text{sen}\,2\pi=0$.

Com estes valores, podemos ampliar a nossa tabela de razões trigonométricas de arcos notáveis, veja:

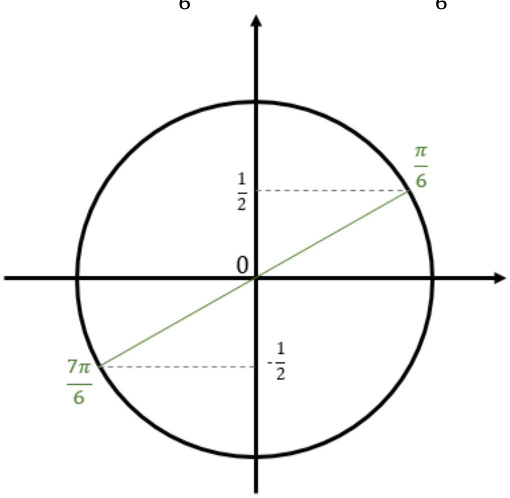
x	sen x
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Exemplos

Ex.: Encontre o valor de $sen\ \frac{7\pi}{6}$.

Resolução:

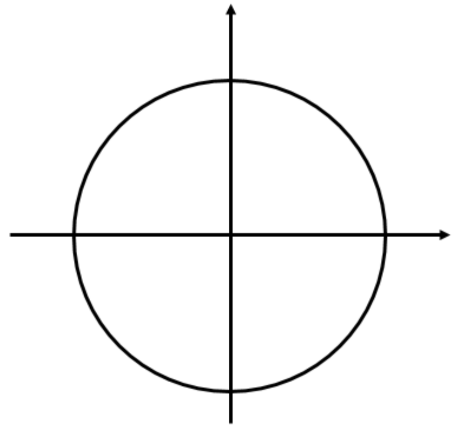
Note, na figura a seguir, que a ordenada da imagem de $\frac{7\pi}{6}$ é simétrica à de $\frac{\pi}{6}$.



Desta forma, $\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Exercícios

01) Abaixo, você encontra uma tabela com todos os arcos notáveis de 0 a 2π rad. Complete as lacunas em branco com o valor do seno de cada arco. Use o ciclo abaixo para facilitar.



x		sen x
grau	radiano	
0	0	
30	$\frac{\pi}{6}$	
45	$\frac{\pi}{4}$	
60	$\frac{\pi}{3}$	
90	$\frac{\pi}{2}$	
120	$\frac{2\pi}{3}$	
135	$\frac{3\pi}{4}$	
150	$\frac{5\pi}{6}$	
180	π	
210	$\frac{7\pi}{6}$	

225	$\frac{5\pi}{4}$	
240	$\frac{4\pi}{3}$	
270	$\frac{3\pi}{2}$	
300	$\frac{5\pi}{3}$	
315	$\frac{7\pi}{4}$	
330	$\frac{11\pi}{6}$	
360	2π	

02) Quanto vale o sen 5π?

03) Quanto vale $\operatorname{sen} -\frac{\pi}{4}$?

04) Calcule $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}}{\operatorname{sen}^2\frac{5\pi}{6}}$.

05) Dê o sinal de cada uma das expressões:

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

b) $(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x),\ x \in R$

c) $\operatorname{sen} 111^\circ - \operatorname{sen} 110^\circ$

06) A qual quadrante pode pertencer α quando:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{5}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{9}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = 2{,}3$

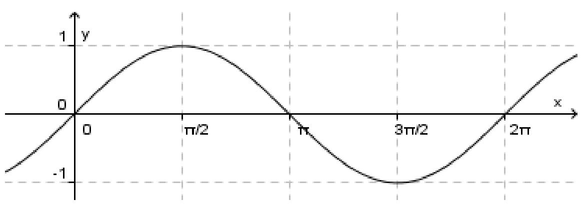
GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

Vamos fazer x percorrer o ciclo trigonométrico no intervalo [0; 2π] e vejamos o que acontece.

Se a imagem de x (o ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário a ordenada de P varia de acordo com a seguinte tabela:

x	0	→	$\frac{\pi}{2}$	→	π	→	$\frac{3\pi}{2}$	→	2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

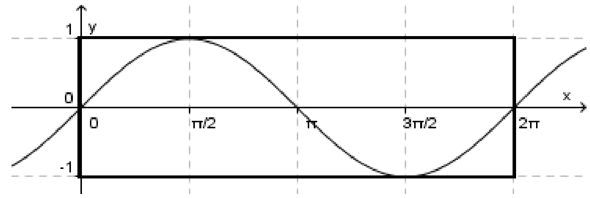
Localizando pontos num sistema cartesiano com x nas abscissas e f(x) = sen x nas ordenadas e relacionando-os de acordo com a tabela acima, chegamos ao seguinte gráfico:



Este gráfico é chamado de SENOIDE e nos indica como varia a função seno.

Note que, como o domínio da função seno é ℝ uma vez que a senoide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0.

Abaixo está o mesmo gráfico visto anteriormente porém com uma parte destacada:



No retângulo está destacado um período da função o que equivale a uma volta do ponto P no ciclo trigonométrico. Note também que o retângulo tem dimensões 2 x 2π ou seja, aproximadamente 2 x 6,28.

Exemplos

Ex.1: Construir o gráfico da função $f(x) = -2\operatorname{sen}x$.

Resolução:
Vamos construir o gráfico em etapas:
Primeiro vamos atribuir valores para x completando a tabela abaixo:

x	*sen x*	*-2 sen x*
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

Agora determinamos os valores de sen x completando a segunda coluna.

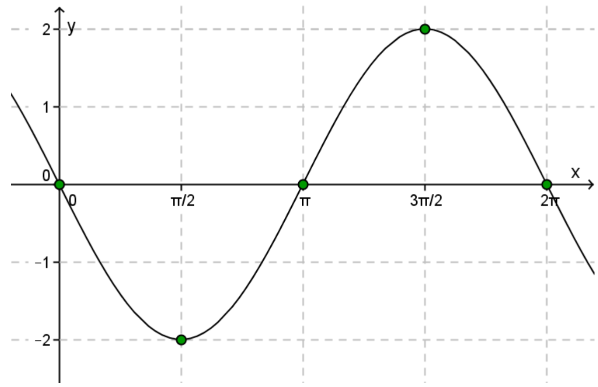
x	sen x	-2 sen x
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

Por fim, multiplicamos cada valor encontrado por -2

x	sen x	-2 sen x
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	2
2π	0	0

Agora localizamos no plano cartesiano os pontos os pontos encontrados.

O passo seguinte é ligar estes pontos



D = ℝ e Im = [-2; 2]

Ex.2: Construir o gráfico da função $f(x) = 1 + \text{sen}(2x)$.

Resolução:
Assim como fizemos no exemplo anterior, vamos construir uma tabela relacionando alguns valores de x com seus correspondentes em y.

O primeiro passo será adotar para 2x valores que nos facilitem a construção:

x	2x	sen(2x)	1+sen(2x)
	0		
	$\frac{\pi}{2}$		
	π		
	$\frac{3\pi}{2}$		
	2π		

Em seguida calculamos os valores correspondentes para x e completamos a primeira coluna da tabela.

x	2x	sen(2x)	1+sen(2x)
0	0		
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{\pi}{2}$	π		
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$		
π	2π		

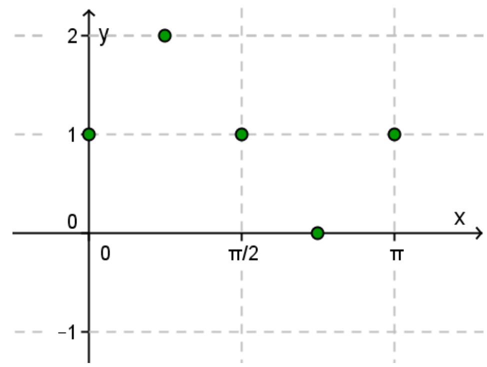
O passo seguinte é completar a terceira coluna:

x	2x	sen(2x)	1+sen(2x)
0	0	0	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	
$\frac{\pi}{2}$	π	0	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	
π	2π	0	

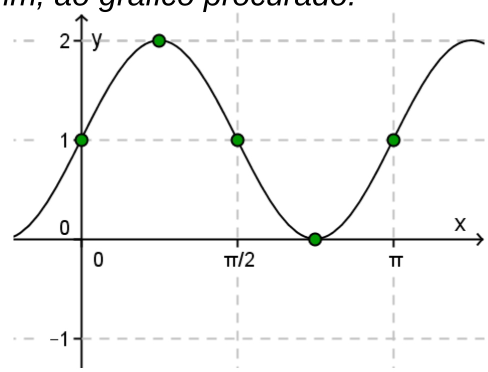
Por fim, fazemos a última coluna, neste caso, somando uma unidade a cada termo da terceira.

x	2x	sen(2x)	1+sen(2x)
0	0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\frac{\pi}{2}$	π	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
π	2π	0	1

Agora vamos localizar estes pontos no plano cartesian



Agora, vamos ligar os pontos chegando, enfim, ao gráfico procurado:



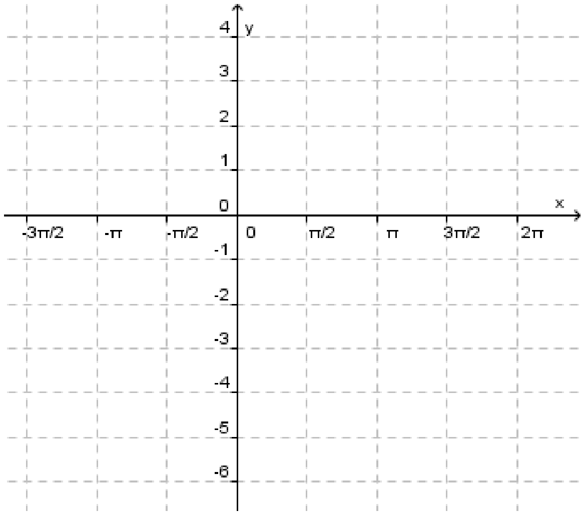
D = ℝ e Im = [0; 2]

Exercícios

07) Construa o gráfico da função $f(x) = -2 + sen\,x$. Determine também domínio e imagem de f. (Dica: preencha a tabela abaixo para facilitar a construção)

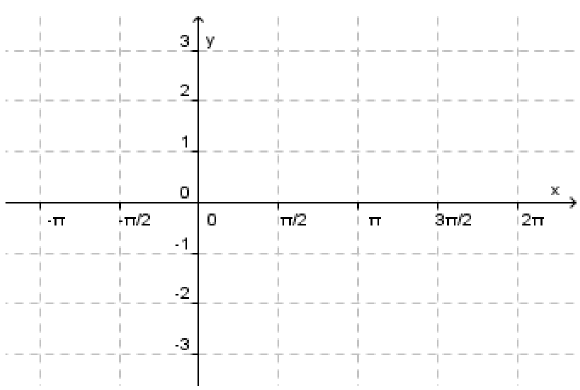
x	*sen x*	*-2 + sen x*
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

(Tente estender seu gráfico além do intervalo [0; 2π])



D = 　　　　　　　　Im =

08) Construa o gráfico de $f(x) = |sen\, x|$.



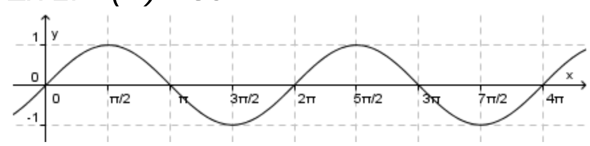
PERÍODO, AMPLITUDE E IMAGEM DA FUNÇÃO SENO

Chamamos de **período** de uma função à menor parte da função que se repete sempre.

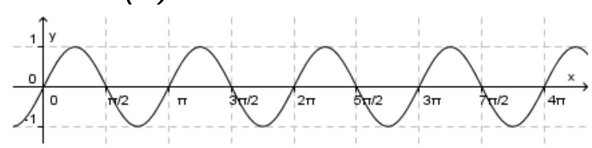
Já vimos que a função $f(x) = sen\, x$ é periódica e possui período 2π mas este período pode variar quando a função apresentar um número p multiplicando o argumento da função. Veja os três exemplos abaixo:

Exemplos

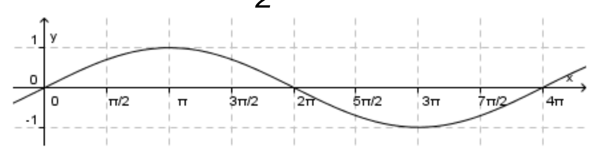
Ex.1: $f(x) = sen\, x$



Ex.2: $f(x) = sen\, 2x$



Ex.3: $f(x) = sen\, \dfrac{x}{2}$



Note, no primeiro exemplo, que o gráfico se repete a cada 2π, ou seja, o que acontece entre 0 e 2π se repete entre 2π e 4π. Destaque este período no 1º gráfico e em seguida faça o mesmo nos gráficos seguintes. Observe o "tamanho" do período em cada caso.

Verifique que em $f(x) = sen\,x$, o período tem comprimento 2π. Em $f(x) = sen\,2x$, o período tem comprimento π e em $f(x) = sen\,\frac{x}{2}$, tem período 4π.

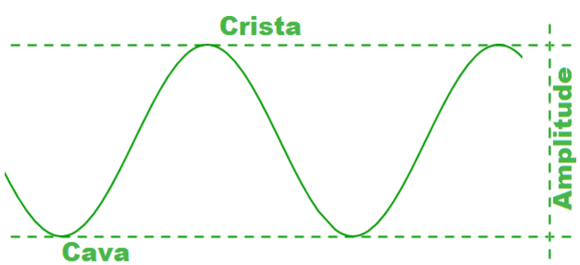
De modo geral, numa expressão do tipo:

$$f(x) = sen(px)$$

o elemento p tem influência direta no período e este é sempre dado por:

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{p}$$

AMPLITUDE de uma onda é a distância entre a linha que passa pela crista e a linha que passa pela cava. Veja a ilustração abaixo:

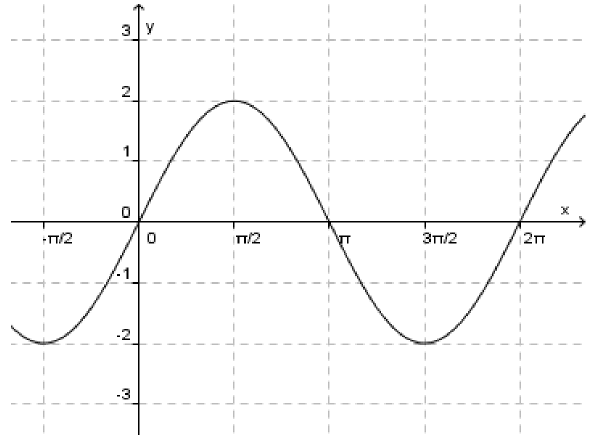


No caso da função $f(x) = sen\,x$, a amplitude é igual a 2 pois a função varia de -1 até 1. Fazendo 1 – (-1) encontramos a amplitude.

Vamos ver outros casos nos exemplos a seguir.

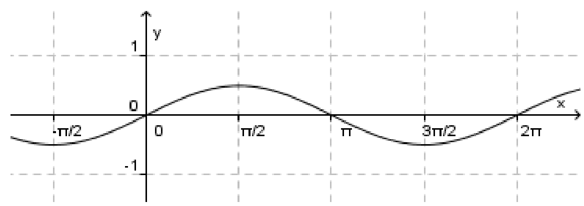
Exemplos

Ex.1: $f(x) = 2\,sen(x)$



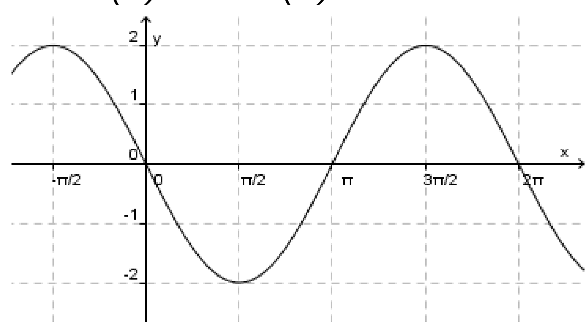
Amplitude: 4

Ex.2: $f(x) = \frac{1}{2} sen(x)$



Amplitude: 1

Ex.3: $f(x) = -2\,sen(x)$



Amplitude: 4

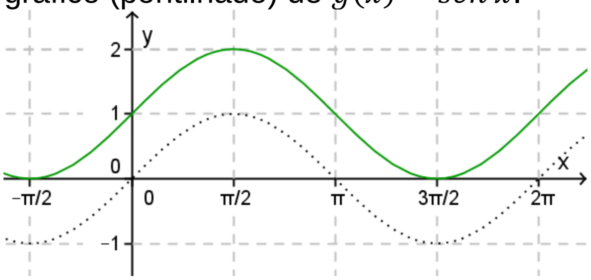
Note que nos três exemplos acima, o período na função não muda. O que muda ao multiplicar a função por um úmero real é a amplitude da função. Este termo tem, inclusive, influência direta sobre a imagem da função.

Como já vimos nos casos das funções polinomiais do 1º ou 2º grau e até mesmo na função modular, quando somamos ou subtraímos um número real à função, “causamos” um deslocamento vertical no gráfico e isto também causa influência sobre a imagem.

Veja os exemplos a seguir:

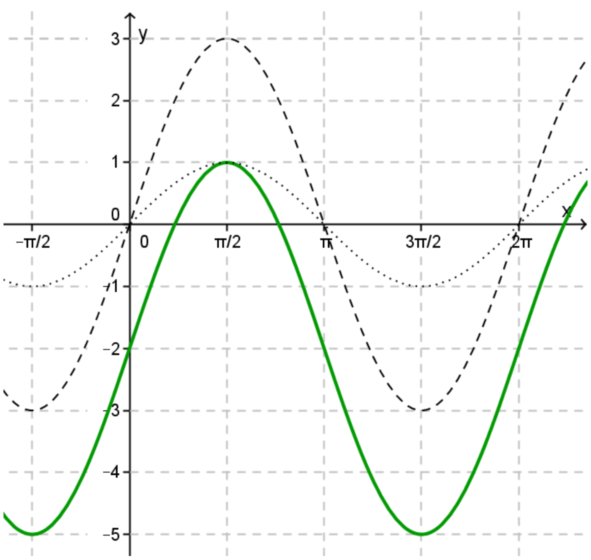
Exemplos

Ex.1: Observe o gráfico da função $f(x) = 1 + sen\,x$. E compare com o gráfico (pontilhado) de $g(x) = sen\,x$.



Acerca da função $f(x) = 1 + sen\,x$, observando o gráfico, podemos notar que o domínio é $\mathbb{R}$, aimagem é $[0, 2]$ e a amplitude é 2.

Ex.2: $f(x) = -2 + 3\,sen\,x$



Neste exemplo, deixamos pontilhado, o gráfico de $f(x) = sen\,x$, tracejado, está o gráfico de $g(x) = 3sen\,x$ e, em verde, o gráfico da função $f(x) = -2 + 3\,sen\,x$. Comparando os três nesta ordem, você pode notar o aumento da amplitude (multiplicada por 3) no gráfico tracejado e o seu deslocamento vertical em 2 unidades para baixo no gráfico em verde.

Observando o gráfico de $f(x) = -2 + 3\,sen\,x$, podemos dizer, sobre a função, que D = $\mathbb{R}$ e Im = [-5; 1] – Amplitude: 6

PARÂMETROS NA FUNÇÃO f(x) = K + A sen (Px + D)

Como já vimos no tópico anterior, o parâmetro K causa um deslocamento vertical no gráfico da função.

O parâmetro A altera a amplitude do gráfico da função.

O parâmetro P influencia o período da função

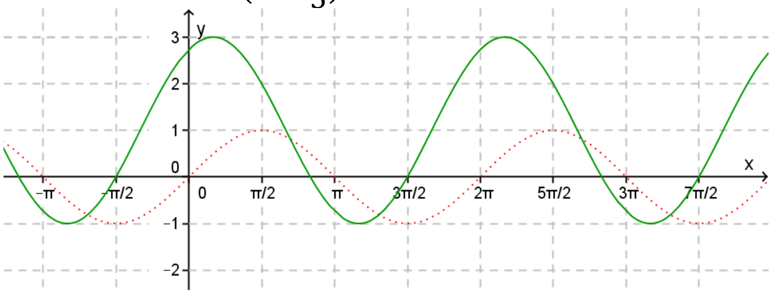
Por fim, o parâmetro D (combinado com o P) determina um deslocamento horizontal no gráfico da função. O quociente $-\frac{D}{P}$ é também chamado de ângulo de defasagem.

Observe, nos três próximos exemplos o “papel” destes parâmetros. Em cada caso há uma discussão acerca da “influência” de cada parâmetro no gráfico obtido.

Obs: Nos três gráficos está pontilhado em vermelho o gráfico de $f(x) = sen\,x$.

Exemplos

$f(x) = 1 + 2sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



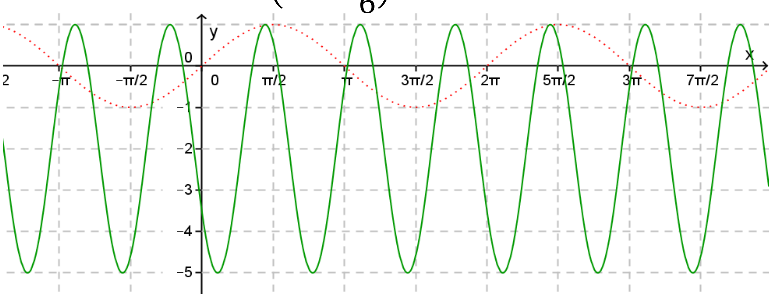
Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

O parâmetro A (= 2) faz com que a amplitude do gráfico dobre (comparando com a amplitude de $f(x) = sen\,x$)e o parâmetro K (= 1) "desloca" o gráfico em uma unidade para cima.

O parâmetro P (= 1) não mexe no período da função e o parâmetro D (= $\frac{\pi}{3}$) desloca o gráfico, horizontalmente em $\frac{\pi}{3}$ unidades para a esquerda.

$f(x) = \ -2 - 3sen\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$



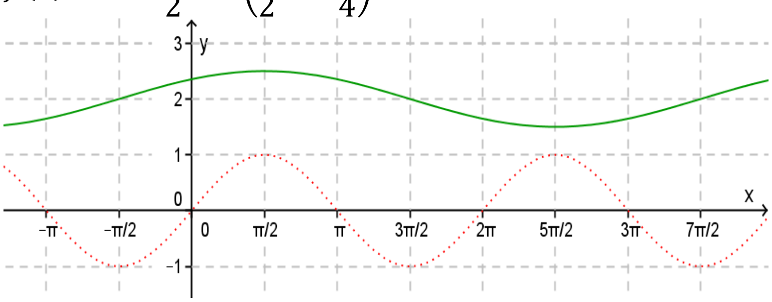
Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

O parâmetro A (= 3) faz com que a amplitude do gráfico triplique e o parâmetro K (= -2) "desloca" o gráfico em duas unidades para baixo.

O parâmetro P (= 3) divide o período por 3 e o parâmetro D (= $\frac{\pi}{6}$) dividido por P desloca o gráfico, horizontalmente em $\frac{\pi}{18}$ unidades para a esquerda.

$f(x) = 2 + \frac{1}{2}sen\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$



Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

O parâmetro A (= $\frac{1}{2}$) faz com que a amplitude do gráfico reduza à metade e o parâmetro K (= 2) "desloca" o gráfico em duas unidades para cima.

O parâmetro P (= $\frac{1}{2}$) dobra o período o parâmetro D (= $\frac{\pi}{6}$) dividido por P ($\frac{\pi}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$) desloca o gráfico, horizontalmente em $\frac{\pi}{3}$ unidades para a esquerda.

Vamos, agora, determinar a imagem de uma função do tipo $f(x) = K + A\,sen(Px + D)$, acompanhe.

Considerando K = 0 e A = 1, temos, como imagem de f, o intervalo [-1; 1].

Quando multiplicamos a função por um número real A, cada um desses dois extremos (-1 e 1) fica multiplicado por A, assim, a imagem passa a ser o intervalo [-A; A] quando A > 0 e de forma mais genérica, este intervalo pode ser [-|A|; |A|] para qualquer que seja A.

Entretanto, quando K $\neq$ 0, esta imagem sofre um deslocamento vertical assim, cada extremo do conjunto imagem fica somado de K unidades desta forma, a imagem da função genérica proposta no início desta página pode ser dada por:

Im = [-|A| + K; |A| + K]

É interessante notar que os parâmetros P e D não interferem na imagem.

Veja, agora, as etapas para construir o gráfico de uma função seno um pouco mais elaborada.

Exemplos

Ex.: Construir o gráfico da função

$$f(x) = 1 + 2\,sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Resolução:

O primeiro passo será adotar para $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ valores que nos facilitem a construção:

x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$	$sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$
		0	
		$\frac{\pi}{2}$	
		π	
		$\frac{3\pi}{2}$	
		2π	

A partir daí, preenchemos as duas colunas anteriores somando $\frac{\pi}{3}$ para a segunda coluna e, em seguida, multiplicando por dois pra obter a primeira coluna.

x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$	$sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	0	
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	π	
$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{14\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	2π	

Agora preencheremos a coluna $sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$

x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$	$\text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	0	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	π	0
$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{14\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	2π	0

Multiplicando cada valor por 2, encontraremos a coluna 2sen($\frac{x}{2}$*)*

$\text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$	$2\ \text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$	$1+2\ \text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$
0	0	
1	2	
0	0	
-1	-2	
0	0	

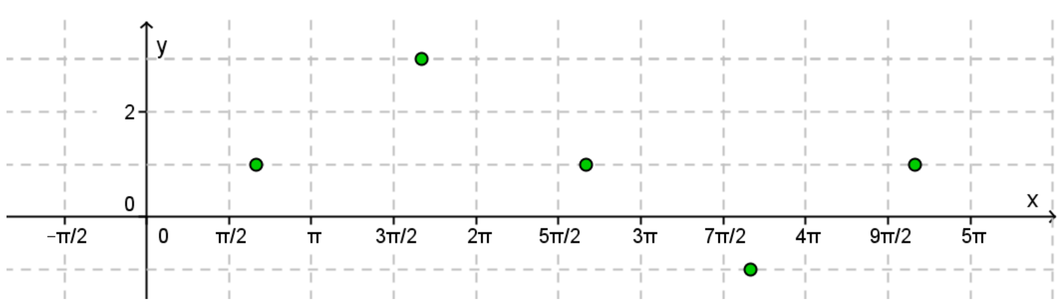
E agora, somando 1 unidade a cada termo, terminamos a tabela preenchendo a última coluna.

$\text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$	$2\ \text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$	$1+2\ \text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$
0	0	1
1	2	3
0	0	1
-1	-2	-1
0	0	1

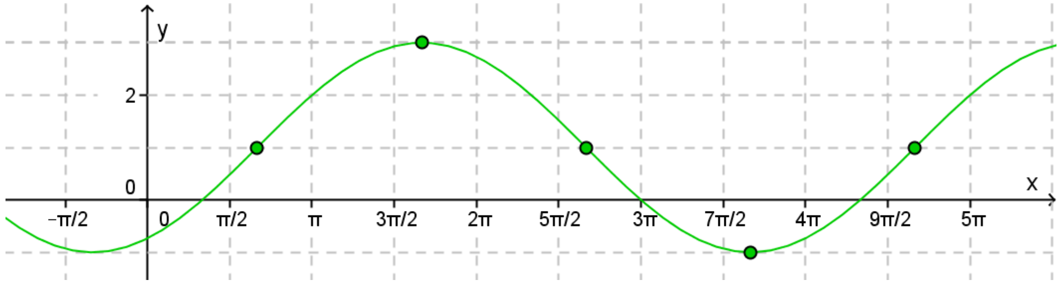
Com isso, temos uma tabela que relaciona x com 1+sen($\frac{x}{2}$*)*

x	$1+2\ \text{sen}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$
$\frac{2\pi}{3}$	1
$\frac{5\pi}{3}$	3
$\frac{8\pi}{3}$	1
$\frac{11\pi}{3}$	-1
$\frac{14\pi}{3}$	0

Agora vamos localizar estes pontos no sistema cartesiano:



O passo seguinte é "ligar" estes pontos para gerar o gráfico da função



Observando o gráfico, determine:

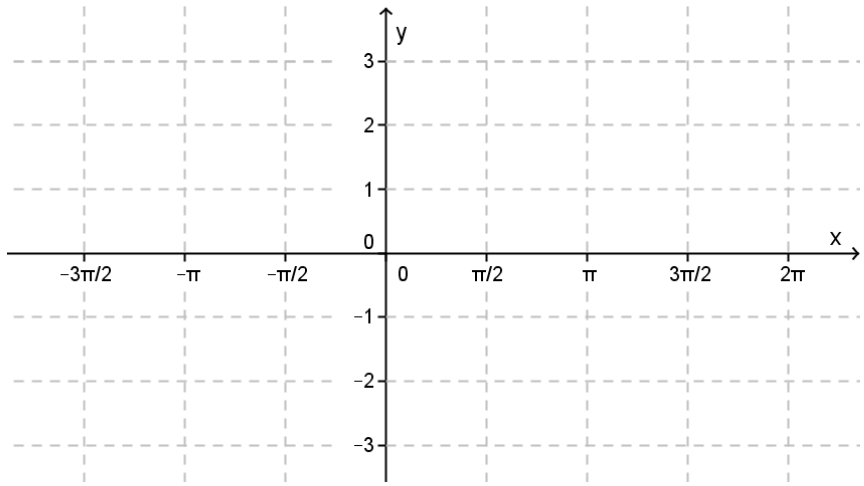
Amplitude: Período:

Domínio: Imagem

Exercícios

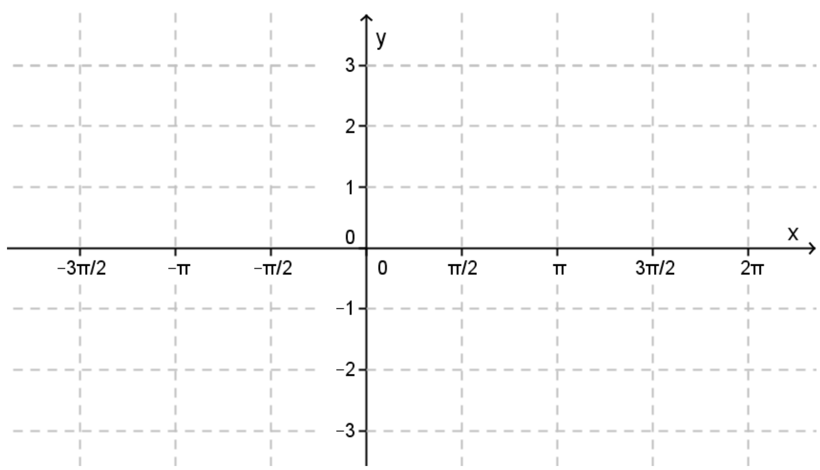
09) Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + sen(x)$.

x	*sen x*	*1+ sen x*

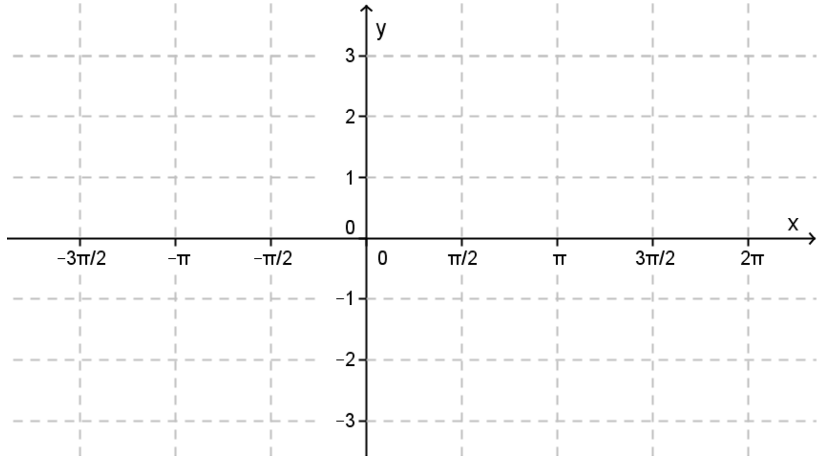


10) Construa o gráfico da função $f(x) = sen(x - \frac{\pi}{4})$

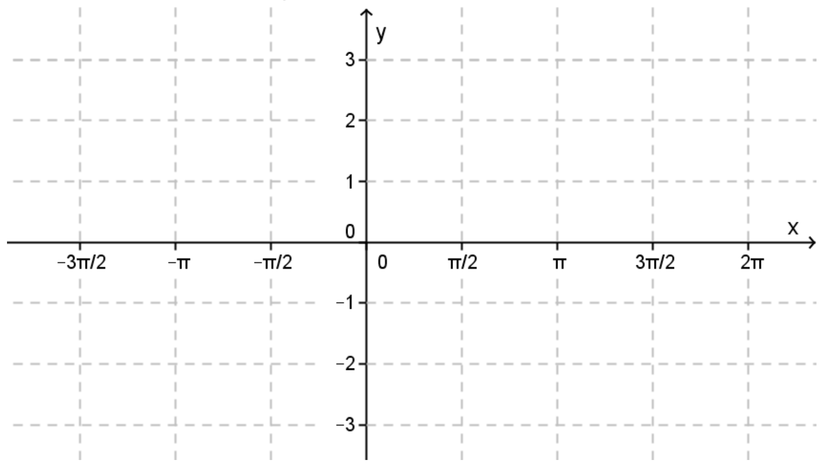
x	$x - \frac{\pi}{4}$	$sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



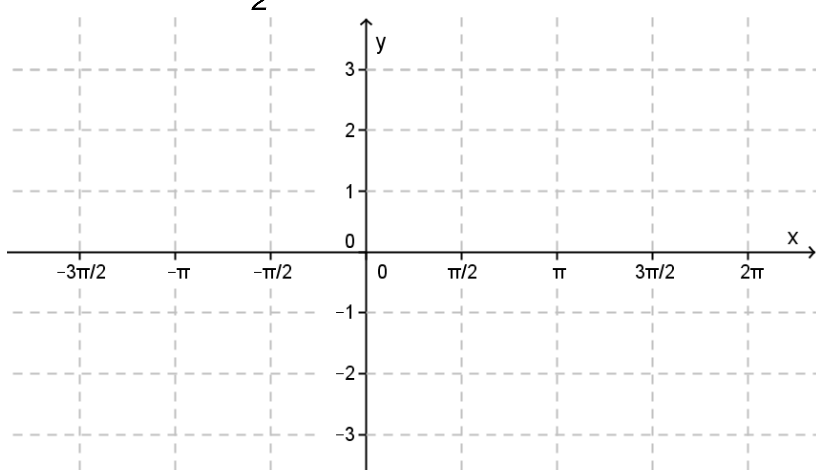
11) Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + sen(x - \frac{\pi}{4})$



12) Construa o gráfico da função $f(x) = sen(2x - \frac{\pi}{3})$.



13) Construa o gráfico da função $f(x) = 1 - sen(\frac{x}{2})$.

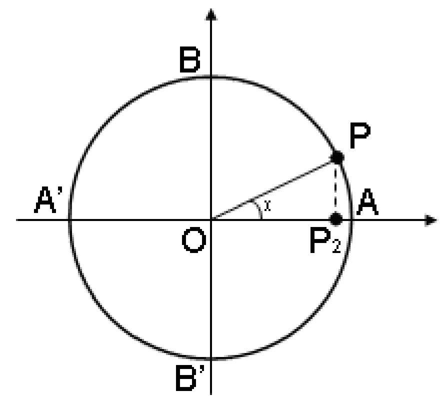


14) Para que valores de m existe x tal que $sen\, x = 2m - 5$?

15) Para que valores de m existe x tal que $sen\, x = \dfrac{m-1}{m-2}$?

FUNÇÃO COSSENO

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo.



Denominamos COSSENO de x a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema cartesiano.

Denominamos *função cosseno* a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $OP_2 = \cos x$, isto é:

$$f(x) = \cos x$$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO COSSENO

1	A imagem da função cosseno é o intervalo [1; 1], isto é: $$-1 \leq \cos x \leq 1$$ Isto pode ser verificado facilmente pois como o ponto P pertence ao ciclo de raio 1 e centro na origem, sua ordenada fica limitada ao intervalo [1; 1]

2 Se x é um arco do primeiro ou quarto quadrante, então cos x é positivo.

Esta propriedade também pode ser verificada notando que quando x está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad ou entre $\frac{3\pi}{2}$rad e 2π rad, a sua imagem no ciclo está à direita do eixo vertical.

3 Se x é um arco do segundo ou terceiro quadrante, então cos x é negativo.

Esta propriedade também pode ser verificada notando que quando x está $\frac{\pi}{2}$ rad e $\frac{3\pi}{2}$rad, a sua imagem no ciclo está à esquerda do eixo vertical.

4 Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrantes então f(x) = *cos* x é decrescente.

Note que se x percorre o primeiro quadrante, o ponto P percorre o arco AB e sua abscissa varia de 1 até 0 e no segundo quadrante percorrendo o arco BA' e a abscissa varia de 0 a -1.

5 Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrantes então f(x) = *cos*x é crescente.

Note que se x percorre o terceiro quadrante, o ponto P percorre o arco A'B' e sua abscissa varia de -1 até 0. Já no quarto quadrante, a abscissa varia de 0 a 1.

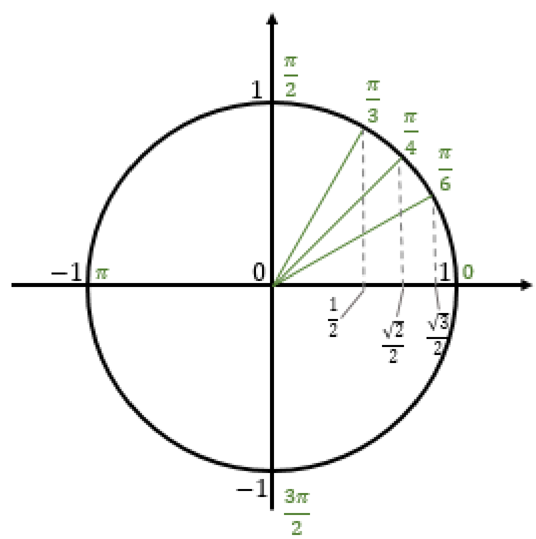
6 A função f(x) = cos x é periódica de período 2π.

Dado um número real x qualquer, sabemos que cos x = cos (x + 2π) assim, concluímos que a cada 2π, a função cosseno se repete.

COSSENO DE ARCOS NOTÁVEIS

Da trigonometria no triângulo retângulo, sabemos que:

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ observe estes valores destacados no ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos notar também que $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\pi=-1$, $\cos\frac{3\pi}{2}=0$ e $\cos 2\pi=1$.

Com estes valores, podemos ampliar a nossa tabela de razões trigonométricas de arcos notáveis, veja:

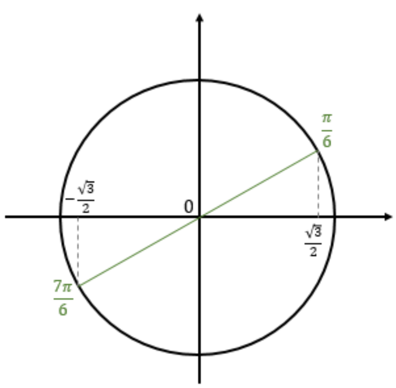
x	sen x	cos x
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

Exemplos

Ex.: Encontre o valor de $cos\frac{7\pi}{6}$.

Resolução:

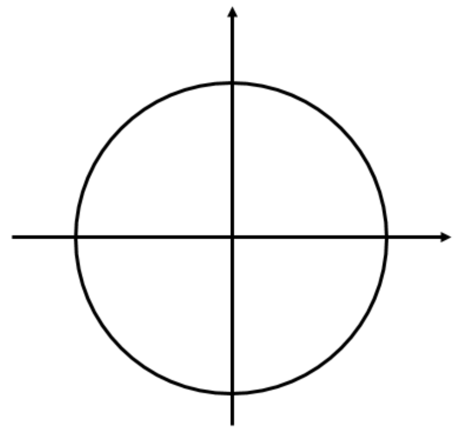
Note, na figura a seguir, que a abscissa da imagem de $\frac{7\pi}{6}$ é simétrica à de $\frac{\pi}{6}$.



Desta forma, $sen\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercícios

16) Abaixo, você encontra uma tabela com todos os arcos notáveis de 0 a 2π rad. Complete as lacunas em branco com o valor do cosseno de cada arco. Use o ciclo abaixo para facilitar.



x		cos x
grau	radiano	
0	0	
30	$\frac{\pi}{6}$	
45	$\frac{\pi}{4}$	
60	$\frac{\pi}{3}$	
90	$\frac{\pi}{2}$	
120	$\frac{2\pi}{3}$	
135	$\frac{3\pi}{4}$	
150	$\frac{5\pi}{6}$	
180	π	
210	$\frac{7\pi}{6}$	
225	$\frac{5\pi}{4}$	

240	$\frac{4\pi}{3}$	
270	$\frac{3\pi}{2}$	
300	$\frac{5\pi}{3}$	
315	$\frac{7\pi}{4}$	
330	$\frac{11\pi}{6}$	
360	2π	

17) Quanto vale o cos 13π?

18) Quanto vale $\cos -\frac{2\pi}{3}$?

19) Calcule $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}}$.

20) Dê o sinal de cada uma das expressões:

a) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{5\pi}{3}$

b) $(1-\cos x)(1+\cos x)$, $x \in R$

c) $\cos 170^o - \cos 190^o$

21) A qual quadrante pode pertencer α quando:

a) $\cos \alpha = -\dfrac{1}{7}$

b) $\cos \alpha = \dfrac{4}{7}$

c) $\cos \alpha = 1,\overline{3}$

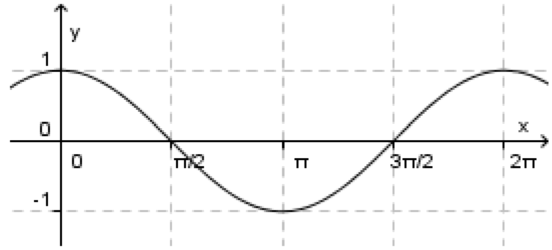
GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

Como fizemos com a função seno, vamos fazer x percorrer o ciclo trigonométrico no intervalo [0; 2π] e anotar o que acontece.

Se a imagem de x dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário a ordenada de P varia de acordo com a seguinte tabela:

x	0	$\rightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\rightarrow$	2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

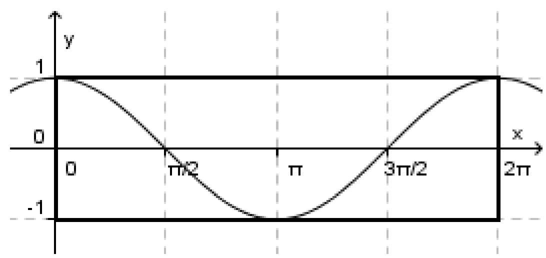
Localizando esses pontos num sistema cartesiano com x nas abscissas e f(x) = cos x nas ordenadas e relacionando-os de acordo com a tabela acima, chegamos ao seguinte gráfico:



Este gráfico é chamado de COSSENÓIDE e nos indica como varia a função cosseno.

Note que, como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, a cossenóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0.

Abaixo está o mesmo gráfico visto anteriormente porém com uma parte destacada:



No retângulo está destacado um período da função. Mais uma vez, tal como acontece na função seno, o retângulo tem dimensões 2 x 2π.

Exemplos

Ex.1: Construir o gráfico da função $f(x) = -2\cos x$.

Resolução:
Vamos construir o gráfico em etapas:
Primeiro vamos atribuir valores para x completando a tabela abaixo:

x	$\cos x$	$-2 \cos x$
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

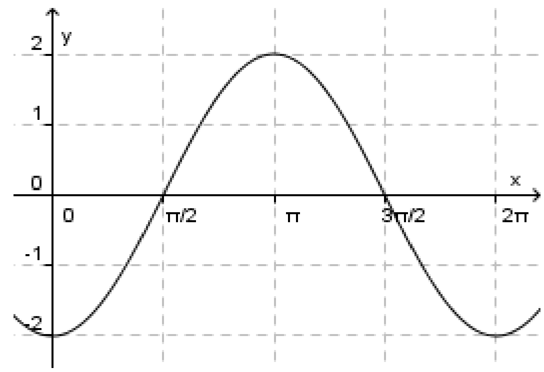
Agora determinamos os valores de cos x completando a segunda coluna.

x	$\cos x$	$-2 \cos x$
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

Por fim, multiplicamos cada valor encontrado por -2

x	$\cos x$	$-2 \cos x$
0	0	-2
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	2
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	-2

Agora construímos gráfico, ligando os pontos encontrados.



D = R e Im = [-2; 2]

Ex.2: Construir o gráfico da função $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

Resolução:
Vamos aqui repetir o procedimento usado na função seno onde construiremos uma tabela relacionando alguns valores de x com seus correspondentes em y.

O primeiro passo será adotar para 2x valores que nos facilitem a construção:

x	2x	cos(2x)	1+cos(2x)
	0		
	$\frac{\pi}{2}$		
	π		
	$\frac{3\pi}{2}$		
	2π		

Em seguida calculamos os valores correspondentes para x e completamos a primeira coluna da tabela.

x	2x	cos (2x)	1+ cos (2x)
0	0		
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{\pi}{2}$	π		
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$		
π	2π		

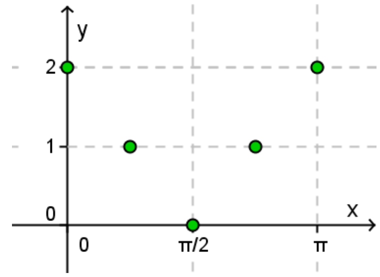
O passo seguinte é completar a terceira coluna:

x	2x	cos (2x)	1+ cos (2x)
0	0	1	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	
π	2π	1	

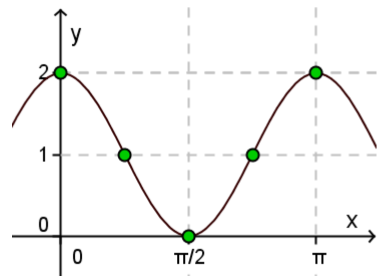
Por fim, fazemos a última coluna, neste caso, somando uma unidade a cada termo da terceira.

x	2x	cos(2x)	1+cos(2x)
0	0	1	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	1
π	2π	1	2

Agora vamos localizar estes pontos no plano cartesiano:



Por fim vamos ligar estes pontos obtendo o gráfico procurado



D = ℝ e Im = [0; 2]

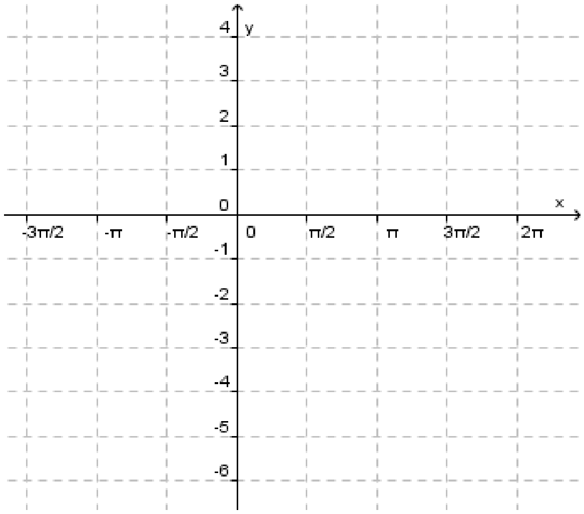
Faça os exercícios a seguir procurando entender os conceitos e relacionar estes resultados com aqueles encontrados nos exercícios relativos à função seno.

Exercícios

22) Construa o gráfico da função $f(x) = -2 + \cos x$. Determine também domínio e imagem de f.

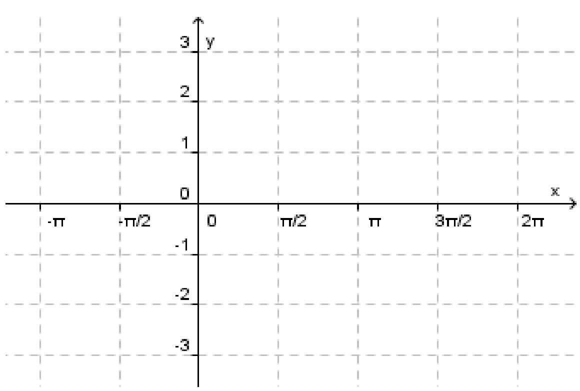
x	cos x	-2 + cos x
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

(Tente estender seu gráfico além do intervalo [0; 2π])



D = Im =

23) Construa o gráfico de $f(x) = |\cos x|$.



PERÍODO, AMPLITUDE E IMAGEM DA FUNÇÃO COSSENO

Não há necessidade de entrar em detalhes sobre as definições de período e amplitude pois estes conceitos já foram caracterizados quando falamos de seno.

Para facilitar ainda mais, a determinação do período e amplitude são similares àquelas da função seno.

Assim, de modo geral, numa expressão do tipo:

$$f(x) = \cos(px)$$

o elemento p tem influência direta no período e este é sempre dado por:

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{p}$$

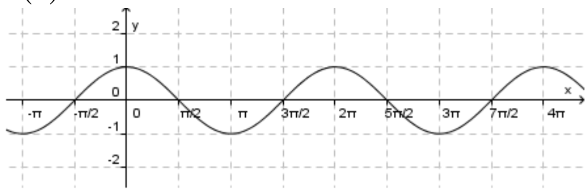
Da mesma forma, um termo que multiplica a função cosseno, tem influência direta sobre sua amplitude semelhante ao que acontece com a função seno.

Nos exemplos a seguir você vai poder notar estes detalhes, observe com atenção o papel de cada parâmetro adicionado à forma básica f(x) = *cos* (x).

Exemplos

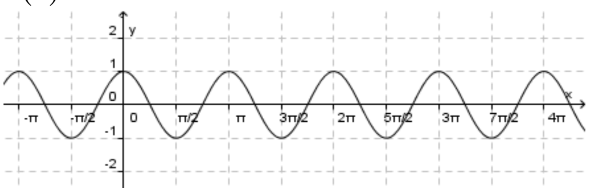
Ex.1:

$f(x) = cos\,x$



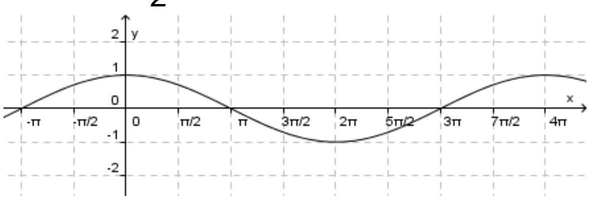
Ex.2:

$f(x) = cos\,2x$



Ex.3:

$f(x) = cos\,\dfrac{x}{2}$



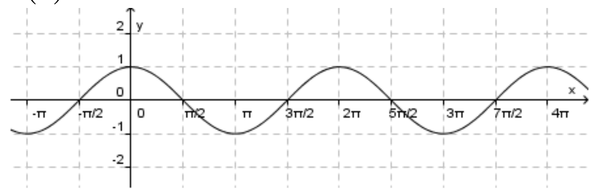
Nos três casos acima, a amplitude da onda não muda. O que varia é o período e esta variação é causada pelo parâmetro que multiplica o argumento da função: 1 na primeira, 2 na segunda e $\dfrac{1}{2}$ na terceira.

Note, nos próximos casos, a variação da amplitude.

Exemplos

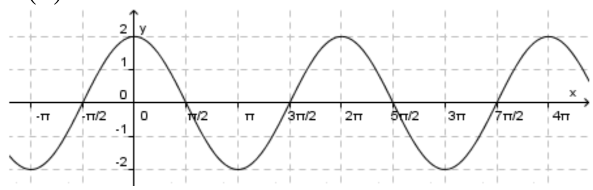
Ex.1:

$f(x) = cos\,x$



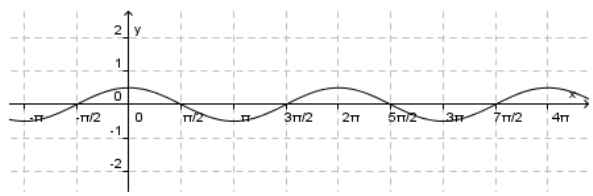
Ex.2:

$f(x) = 2\,cos\,x$



Ex.3:

$f(x) = \dfrac{1}{2}cos\,x$



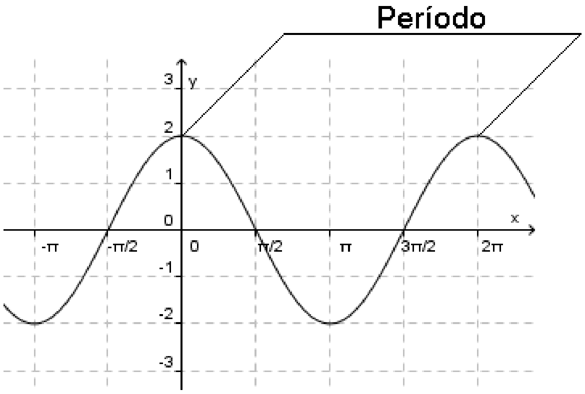
Observe que o período é igual a 2π nos três casos já a amplitude varia. No primeiro, a imagem varia de -1 a 1. No segundo exemplo, a imagem é o intervalo [-2; 2] e neste terceiro a imagem está entre $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$.

A imagem da função é determinada a partir da amplitude e do deslocamento vertical do gráfico.

Vejamos alguns exemplos onde determinaremos a imagem observando gráfico. Vamos apresentar também o domínio, o período e a amplitude em cada caso.

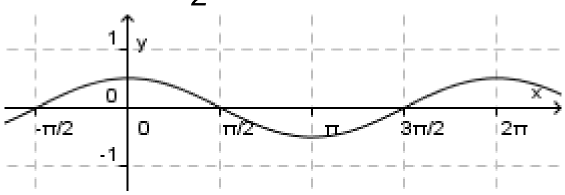
Exemplos

Ex.1: $f(x) = 2\cos(x)$



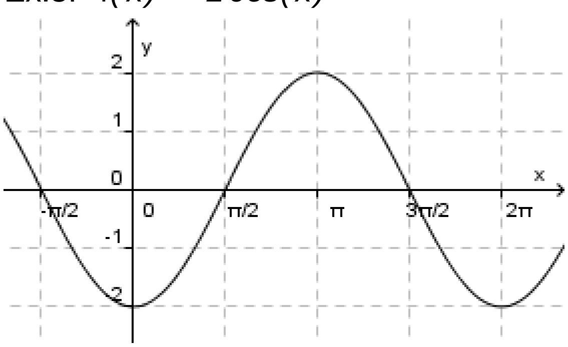
D $\mathbb{R}$
Im [-2; 2]
Período 2π
Amplitude 4

Ex.2: $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$



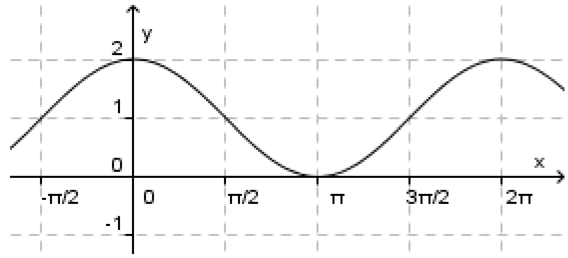
D $\mathbb{R}$
Im $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$
Período 2π
Amplitude 1

Ex.3: $f(x) = -2\cos(x)$



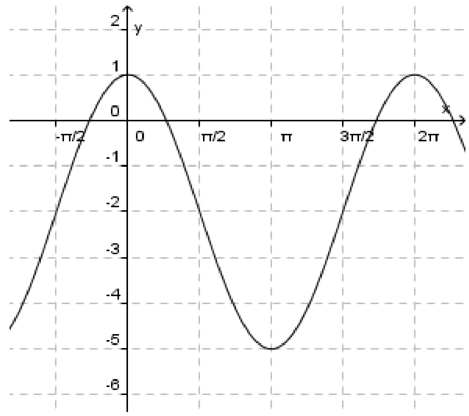
D $\mathbb{R}$
Im [-2; 2]
Período 2π
Amplitude 4

Ex.4: $f(x) = 1 + \cos(x)$



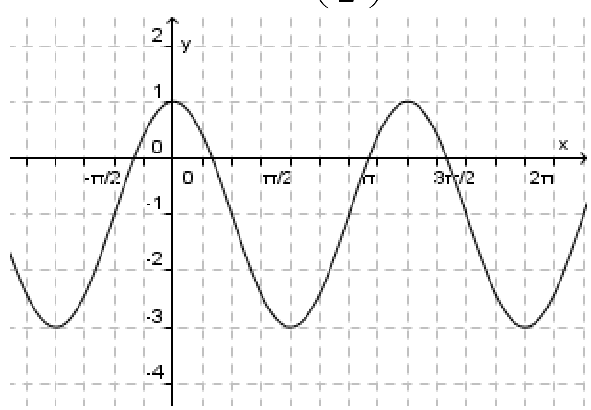
D $\mathbb{R}$ Período 2π
Im [0; 2] Amplitude 2

Ex.5: $f(x) = -2 + 3\cos(x)$



D $\mathbb{R}$ Período 2π
Im [-5; 1] Amplitude 6

Ex.6: $f(x) = -1 + 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$



D $\mathbb{R}$
Im [-3; 1]
Período $\frac{4\pi}{3}$
Amplitude 4

Podemos determinar a imagem observando o gráfico como feito nos exemplos anteriores ou algebricamente a partir da expressão que define a função. No tópico a seguir, veremos como determinar a imagem algebricamente.

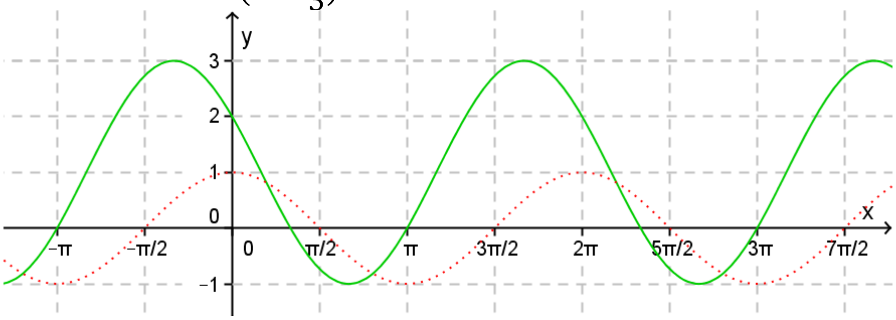
PARÂMETROS NA FUNÇÃO
f(x) = K + A cos (Px + D)

O papel de cada um dos parâmetros K, A, P e D na expressão f(x) = K + A*cos*(Px + D) é idêntico ao apresentado quando trabalhávamos com a função seno então não detalharemos aqui.

Nos exemplos a seguir, vamos observar a influência de cada um dos parâmetros.

Compare os gráficos, sob a luz dos parâmetros, com o gráfico da função f(x) = cos x que está pontilhado em vermelho.

$f(x) = 1 + 2cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



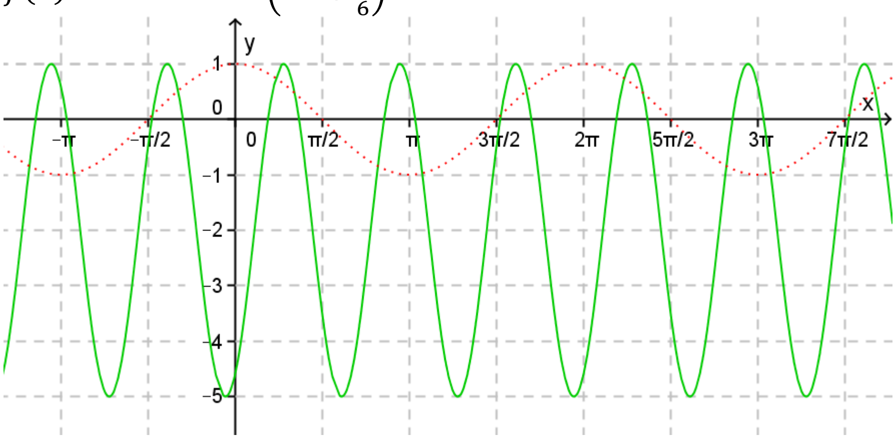
Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

O parâmetro A (= 2) faz com que a amplitude do gráfico dobre (se comparado com a amplitude de $f(x) = sen\,x$)e o parâmetro K (= 1) “desloca” o gráfico em uma unidade para cima.

O parâmetro P (= 1) não mexe no período da função e o parâmetro D (= $\frac{\pi}{3}$) desloca o gráfico, horizontalmente em $\frac{\pi}{3}$ unidades para a esquerda.

$f(x) = -2 - 3cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$



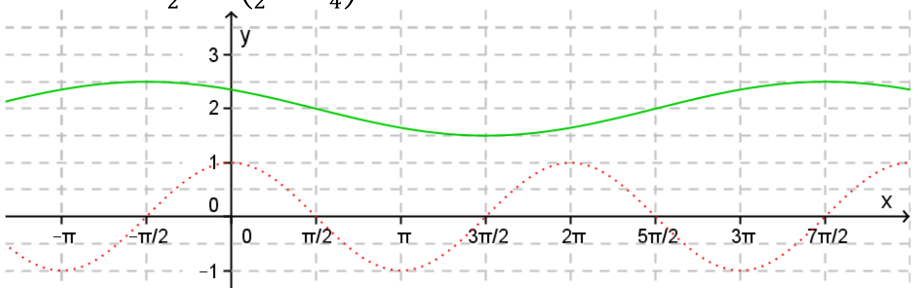
Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

O parâmetro A (= 3) faz com que a amplitude do gráfico triplique e o parâmetro K (= -2) “desloca” o gráfico em duas unidades para baixo.

O parâmetro P (= 3) divide o período por 3 e o parâmetro D (= $\frac{\pi}{6}$) dividido por P desloca o gráfico, horizontalmente em $\frac{\pi}{18}$ unidades para a esquerda.

$f(x) = 2 + \frac{1}{2} cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$



Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

O parâmetro A ($= \frac{1}{2}$) faz com que a amplitude do gráfico reduza à metade e o parâmetro K (= 2) “desloca” o gráfico em duas unidades para cima.

O parâmetro P ($= \frac{1}{2}$) dobra o período o parâmetro D ($= \frac{\pi}{6}$) dividido por P ($\frac{\pi}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$) desloca o gráfico, horizontalmente em $\frac{\pi}{3}$ unidades para a esquerda.

Para determinar, algebricamente, a imagem da função cosseno, podemos fazer da mesma forma como fizemos na função seno:

Im = [-|A| + K; |A| + K]

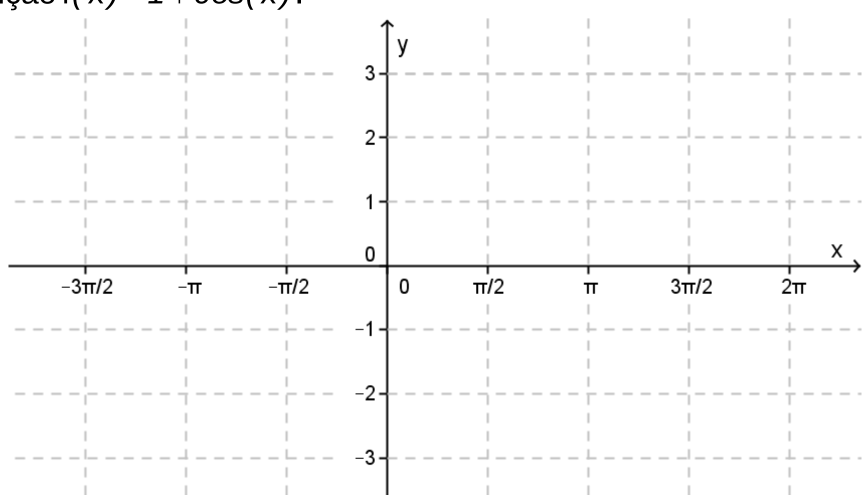
As etapas para a construção do gráfico de uma função cosseno são idênticas àquelas seguidas na construção da função seno por isso, podemos passar direto aos exercícios.

Nesta série, além de construir os gráficos, é interessante que você compare os resultados obtidos com aqueles construídos nas questões 9 a 13. Esta observação vai ajudar você a responder a questão 29.

Exercícios

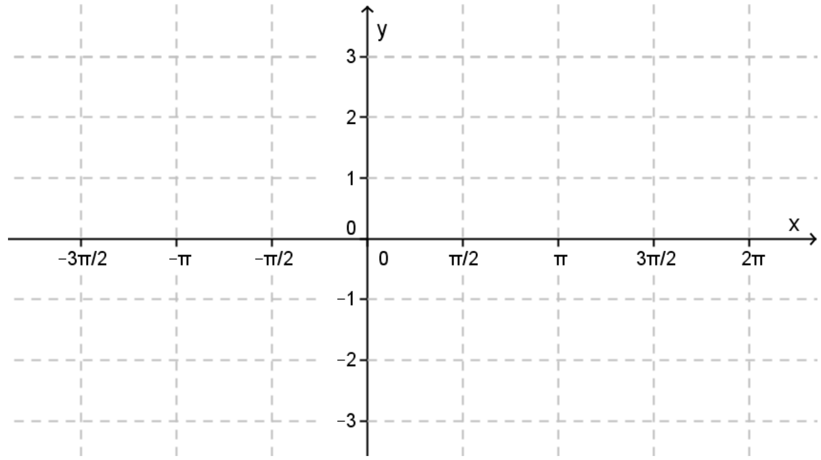
24) Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + cos(x)$.

x	cos x	1+ cos x

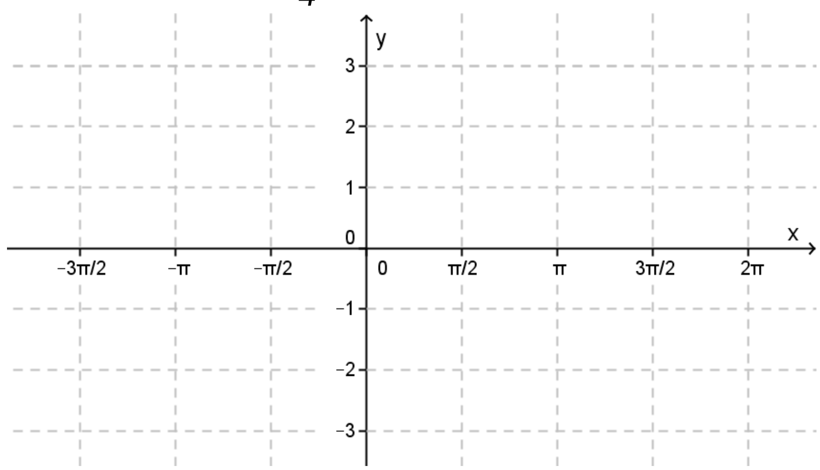


25) Construa o gráfico da função $f(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$

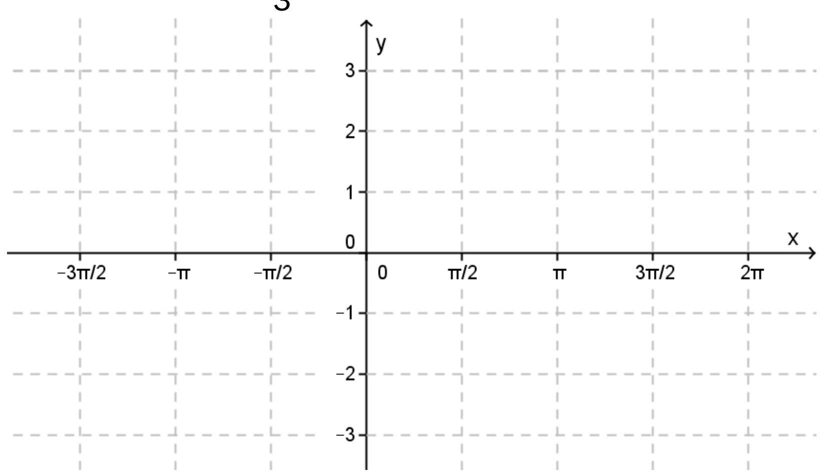
x	$x - \frac{\pi}{4}$	$cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



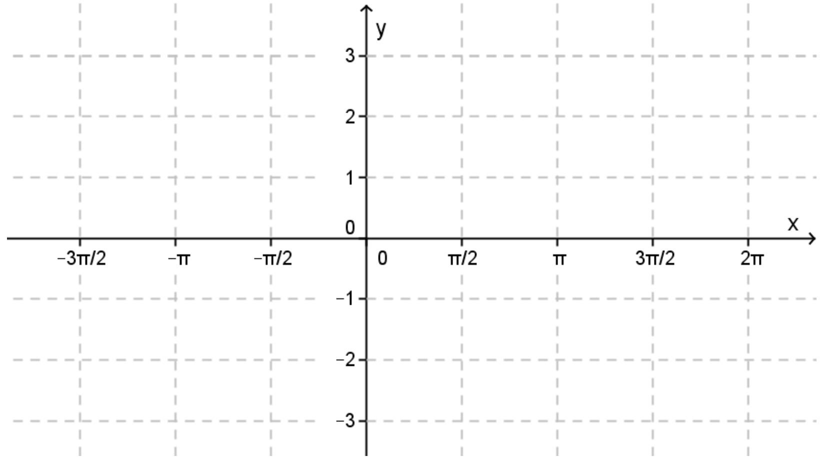
26) Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + cos(x - \frac{\pi}{4})$



27) Construa o gráfico da função $f(x) = cos(2x - \frac{\pi}{3})$.



28) Construa o gráfico da função $f(x) = 1 - cos(\frac{x}{2})$.



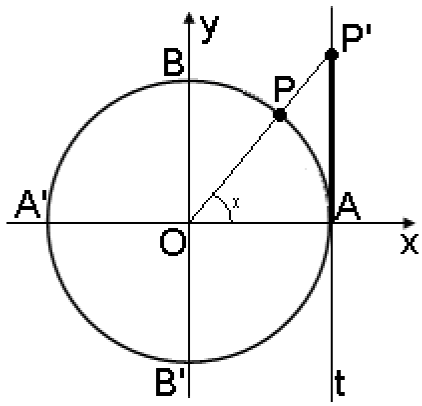
29) Podemos dizer que o gráfico da função seno é igual ao gráfico da função cosseno deslocado em $\frac{\pi}{2}$ rad? Justifique.

30) Para que valores de m existe x tal que $sen\, x = 2m - 5$?

31) Para que valores de m existe x tal que $sen\, x = \frac{m-1}{m-2}$?

FUNÇÃO TANGENTE

Observe o ciclo trigonométrico abaixo.



Foi construída uma reta vertical passando por A e denominada t ou reta das tangentes.

O ponto P' é a intersecção de OP com t.

A ordenada do ponto P' é a tangente do arco x.

Denominamos *função tangente* a função que associa a cada número real x a ordenada de P', assim

$$f(x) = \text{tg } x$$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO TAGENTE

1 A imagem da função tangente é formada por todos os números reais, isto é:

$$-\infty < tg\,x < \infty$$

Isto pode ser verificado facilmente pois à medida que o ponto P se desloca sobre o círculo, a intersecção de OP se desloca por toda a reta t e a sua ordenada, então, varia de $-\infty$ a $+\infty$.

2 Se x é um arco do primeiro ou terceiro quadrante, então f(x) = *tg* x é positiva.

Esta propriedade também pode ser verificada notando que quando x está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ ou entre π e $\frac{3\pi}{2}$, o prolongamento da reta OP toca a reta t acima dos eixo horizontal.

3 Se x é um arco do segundo ou quarto quadrante, então f(x) = *tg* x é negativa.

Mais uma propriedade que também pode ser verificada observando o ciclo trigonométrico notando que quando x está entre $\frac{\pi}{2}$ e π ou entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, o prolongamento da reta OP toca a reta t abaixo dos eixo horizontal.

4 A função f(x) = *tg* x não é definida para $x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\text{rad}$

Quando x é um arco côngruo a $\frac{\pi}{2}\text{rad}$ ou $\frac{3\pi}{2}\text{rad}$, a reta OP é vertical e, consequentemente, paralela à reta t. Neste caso as duas não se interceptam.

5 Se x percorre o primeiro quadrante então f(x) = *tg* x é crescente.

Note que se x percorre o primeiro quadrante, o prolongamento da reta OP "sobe" a reta t de 0 a ∞ até que x chegue bem perto de $\frac{\pi}{2}\text{rad}$.

6 Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrantes então f(x) = *tg* x é crescente.

Note que se x percorre o segundo ou terceiro quadrantes, o prolongamento da reta OP "sobe" a reta t de -∞ até +∞ até que x chegue bem perto de $\frac{3\pi}{2}$rad

7 Se x percorre o quarto quadrante então f(x) = *tg* x é crescente

Note que se x percorre o quarto quadrante, o prolongamento da reta OP "sobe" a reta t de -∞ até 0.

8 A função f(x) = *tg* x é periódica de período π.

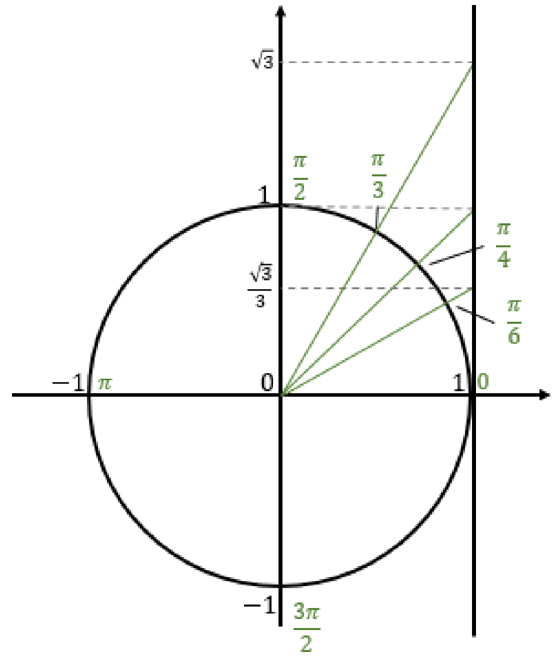
Dado um número real x qualquer, sabemos que *tg* x = *tg* (x + π) assim, concluímos que a cada π, a função seno se repete.

TANGENTE DE ARCOS NOTÁVEIS

Da trigonometria no triângulo retângulo, sabemos que:

$$tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ , } tg\frac{\pi}{4}=1 \text{ e } tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

observe estes valores destacados no ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos notar também que $tg\frac{\pi}{2}=\infty$, $tg\,\pi=0$, $tg\frac{3\pi}{2}=-\infty$ e $tg\,2\pi=0$.

Com estes valores, podemos ampliar a nossa tabela de razões trigonométricas de arcos notáveis, veja:

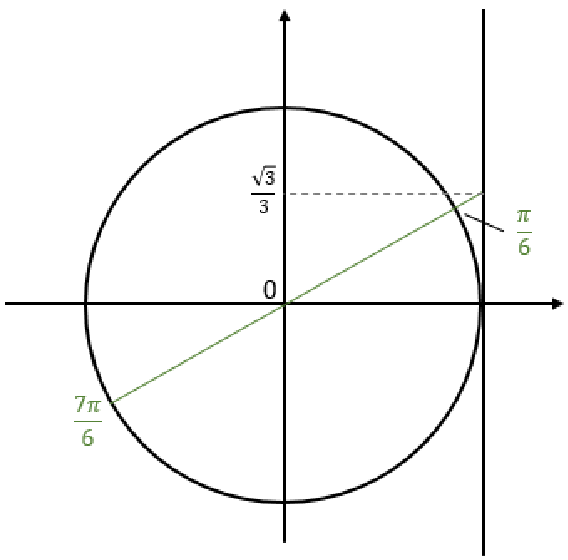
x	tg x
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\infty$
2π	0

Exemplos

Ex.: Encontre o valor de $tg\frac{7\pi}{6}$.

Resolução:

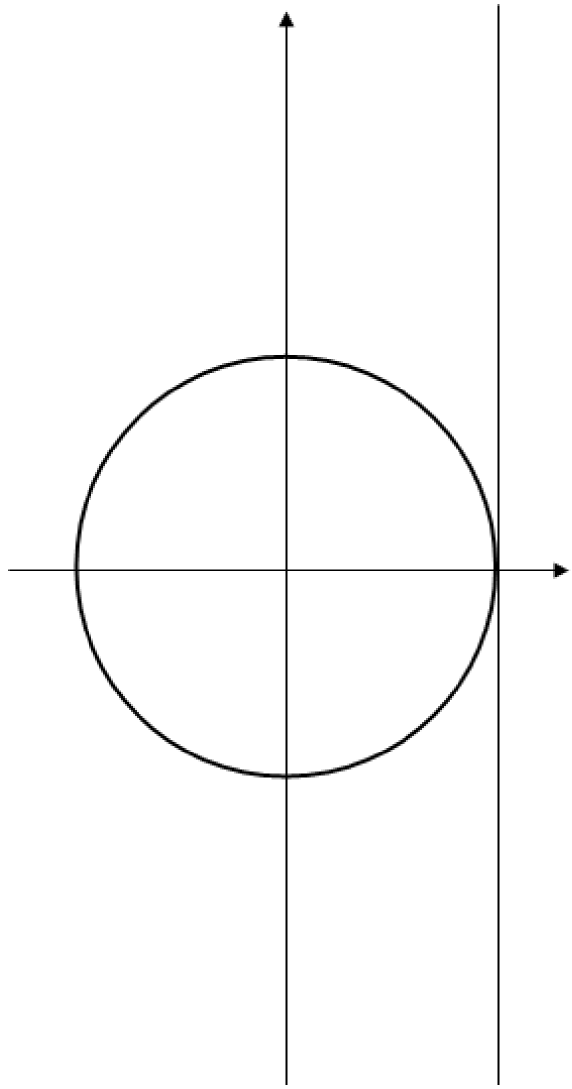
Note, na figura a seguir, que o prolongamento a reta que determina o arco $\frac{7\pi}{6}$ *rad até a reta t, coincide com o prolongamento da reta que determina o arco* $\frac{\pi}{6}$ *rad. Assim, estes dois arcos terão mesma tangente.*



Desta forma, $tg\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercícios

32) a seguir, você encontra uma tabela com todos os arcos notáveis de 0 a 2π rad. Complete as lacunas em branco com o valor da tangente de cada arco. Use o ciclo abaixo para facilitar.



x		tg x
grau	radiano	
0	0	
30	$\frac{\pi}{6}$	
45	$\frac{\pi}{4}$	
60	$\frac{\pi}{3}$	
90	$\frac{\pi}{2}$	
120	$\frac{2\pi}{3}$	
135	$\frac{3\pi}{4}$	
150	$\frac{5\pi}{6}$	
180	π	
210	$\frac{7\pi}{6}$	
225	$\frac{5\pi}{4}$	
240	$\frac{4\pi}{3}$	
270	$\frac{3\pi}{2}$	
300	$\frac{5\pi}{3}$	
315	$\frac{7\pi}{4}$	
330	$\frac{11\pi}{6}$	
360	2π	

33) Quanto vale o $tg\ 5\pi$?

34) Quanto vale $tg - \frac{\pi}{4}$?

35) Calcule $\dfrac{\text{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\frac{5\pi}{6}}{\text{tg}^2\frac{11\pi}{6}}$.

36) Dê o sinal de cada uma das expressões:

a) $\text{tg}\,\frac{\pi}{7}\cdot\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{15\pi}{7}\cdot\text{tg}\,\frac{\pi}{3}$

b) $\text{tg}\,\frac{\pi}{5}\cdot\text{tg}\,\frac{2\pi}{5}\cdot\text{tg}\,\frac{3\pi}{5}\cdot\text{tg}\,\frac{4\pi}{5}\cdot\text{tg}\,\frac{5\pi}{5}$

c) $tg\,165^o + tg\,195^o$

37) A qual quadrante pode pertencer α quando:

a) $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{7}$

b) $\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{4}$

c) $\text{tg}\,\alpha = 2{,}3$

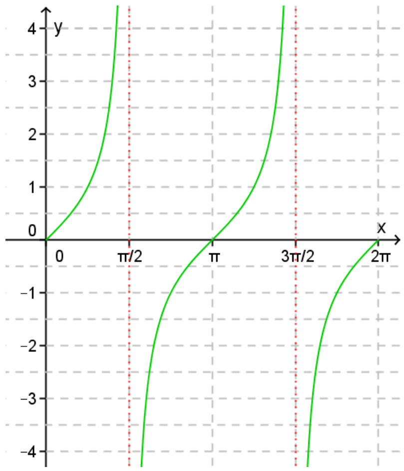
GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE

Como já fizemos com as funções seno e cosseno, vamos fazer x percorrer o ciclo trigonométrico no intervalo [0; 2π] e anotar o que acontece.

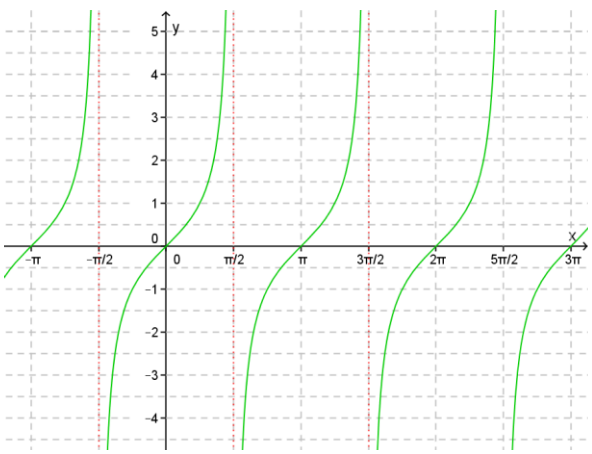
Se a imagem de x dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário a ordenada de P varia de acordo com a seguinte tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tg x	1	cresce	+∞	cresce	0	cresce	-∞	cresce	1

Localizando esses pontos num sistema cartesiano com x nas abscissas e f(x) = *tg* x nas ordenadas e relacionando-os de acordo com a tabela acima, chegamos ao seguinte gráfico:



Este é o gráfico da função tangente e nos indica como ela varia. Estendendo o gráfico além do domínio [0; 2π], temos:

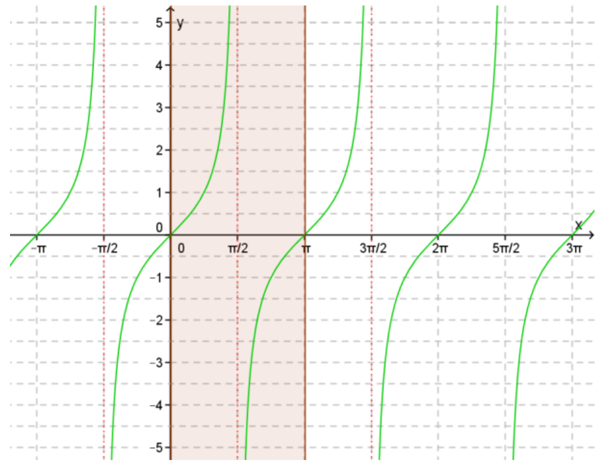


Como a função tangente não é definida para $\frac{\pi}{2}$rad, $\frac{3\pi}{2}$rad e todos os arcos côngruos a estes, ou seja $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) rad$, o gráfico possui assíntotas nestes pontos. Desta forma, o domínio da função tangente é dado por:

$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\mathbb{R}}{2} + k \cdot \pi\right\}$$

O período da função tangente também é diferente do período das funções seno e cosseno.

Abaixo está o mesmo gráfico visto anteriormente porém com uma parte destacada:



No destaque está um período da função. Note que, aqui, o período é π. O retângulo tem largura π unidades porém altura ilimitada.

Exemplos

Ex.1: Construir o gráfico da função $f(x) = 1 + \mathrm{tg}(2x)$.

Resolução:
Vamos aqui repetir o procedimento usado nas funções seno e cosseno construindo uma tabela e relacionando alguns valores de x com seus correspondentes em y.

O primeiro passo será adotar para 2x valores que nos facilitem a construção:

x	2x	*tg*(2x)	1+*tg*(2x)
	0		
	$\frac{\pi}{2}$		
	π		
	$\frac{3\pi}{2}$		
	2π		

Em seguida calculamos os valores correspondentes para x e completamos a primeira coluna da tabela.

x	2x	*tg*(2x)	1+*tg*(2x)
0	0		
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{\pi}{2}$	π		
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$		
π	2π		

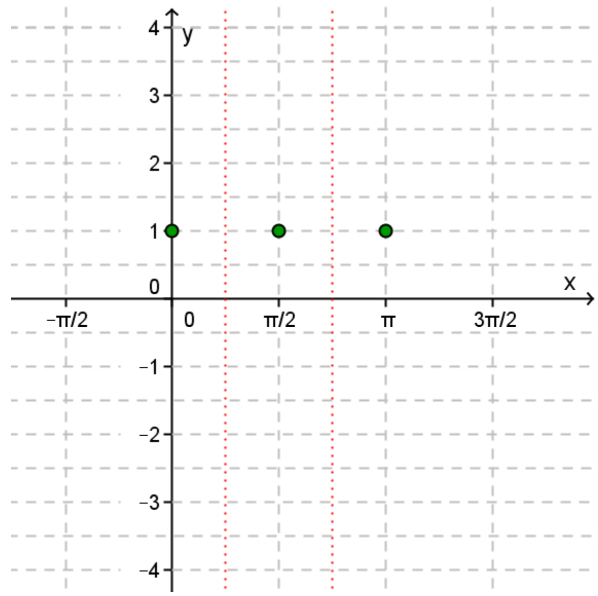
O passo seguinte é completar a terceira coluna:

x	2x	*tg*(2x)	1+*tg*(2x)
0	0	0	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	
$\frac{\pi}{2}$	π	0	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\infty$	
π	2π	0	

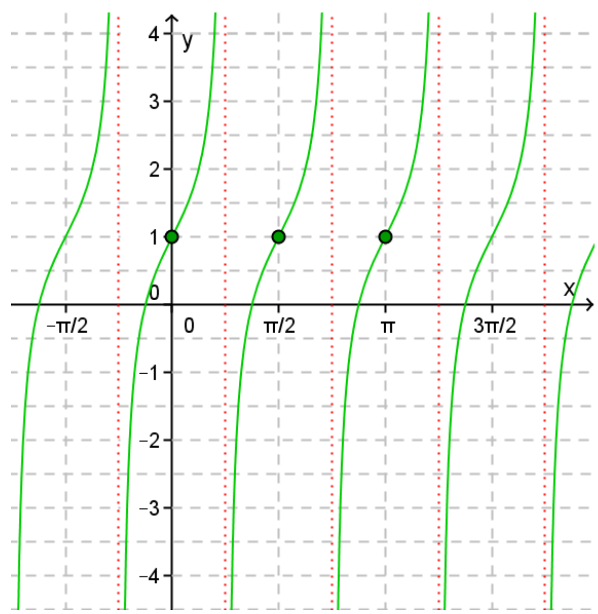
Por fim, fazemos a última coluna, neste caso, somando uma unidade a cada termo da terceira.

x	2x	*tg*(2x)	1+*tg*(2x)
0	0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	$+\infty$
$\frac{\pi}{2}$	π	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\infty$	$-\infty$
π	2π	0	1

Agora vamos localizar estes pontos no plano cartesiano. Naqueles valores de x em que a correspondência em y é $\pm\infty$, passamos uma reta tracejada para caracterizar as assíntotas.

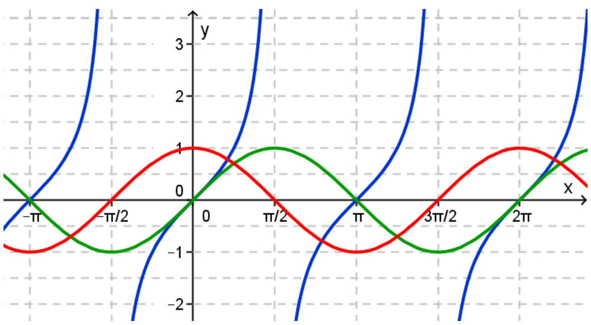


Agora traçamos o gráfico da função de acordo com os pontos e as assíntotas localizadas.



$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \text{ e } Im = \mathbb{R}$$

Faça os exercícios a seguir procurando entender os conceitos. Você perceberá que são muitas relações entre os gráficos da função tangente e com os gráficos das duas funções vistas anteriormente entretanto pode-se procurar enxergar a tangente como a razão entre o seno e o cossseno. Antes dos exercícios, porém, observe esta propriedade no gráfico a seguir que apresenta $f(x) = sen(x)$, $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = tg(x)$.



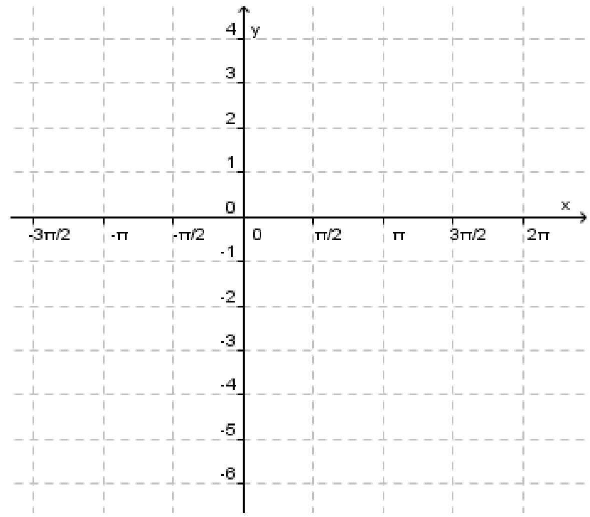
Tome alguns valores de x e suas imagens a partir de f e g. Dividindo-se um valor pelo outro, encontramos a imagem do mesmo x em h.

Exercícios

38) Construa o gráfico da função $f(x) = -tg\,x$. Determine também domínio e imagem de f.

x	*tg x*	*-tg x*
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

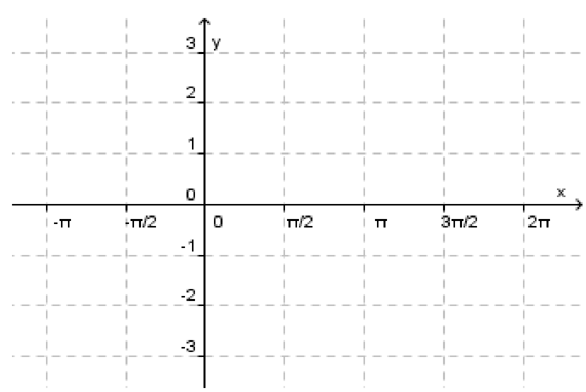
(Tente estender seu gráfico além do intervalo [0; 2π])



D =

Im =

39) Construa o gráfico de $f(x) = |tg\,x|$.



PERÍODO E IMAGEM DA FUNÇÃO TANGENTE

Como já vimos, o período da função f(x) = *tg*x.é π porém, a partir de alguns testes, chegamos à conclusão que numa expressão do tipo:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = tg(\mathrm{px})$$

o período será dado por:

$$\text{Período} = \frac{\pi}{\mathrm{p}}$$

Quanto à imagem da função tangente, podemos notar que, como toda a reta da tangentes pode ser percorria pelo prolongamento da reta que determina cada arco, a imagem será formada por todos os números reais. Assim,

$$Im = \mathbb{R}$$

PARÂMETROS NA FUNÇÃO
f(x) = K + A tg (Px + D)

O papel de cada um dos parâmetros K, A, P e D na expressão f(x) = K + A *tg*(Px + D) é diferente daquele apresentado quando trabalhávamos com as funções seno e cosseno. Veja, a seguir:

- o parâmetro K, que soma um número real à função, causa um deslocamento vertical no gráfico da função.

- O parâmetro A, que multiplica a função por um número real, apenas “estica” o gráfico.
- O parâmetro P, que multiplica a variável independente x por um número real, altera o período da função como visto ao lado.

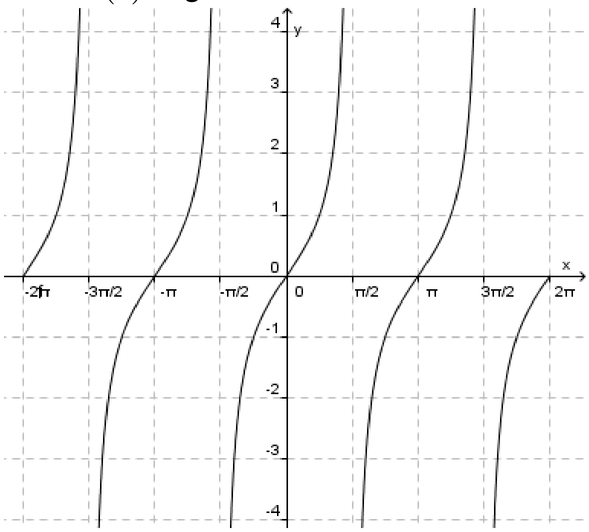
- O parâmetro D, que soma um número real ao argumento da função, causa um deslocamento horizontal no gráfico e, como nas outras funções circulares já estudas, é chamado de ângulo de defasagem.

Nos exemplos a seguir, vamos observar a influência de cada um dos parâmetros.

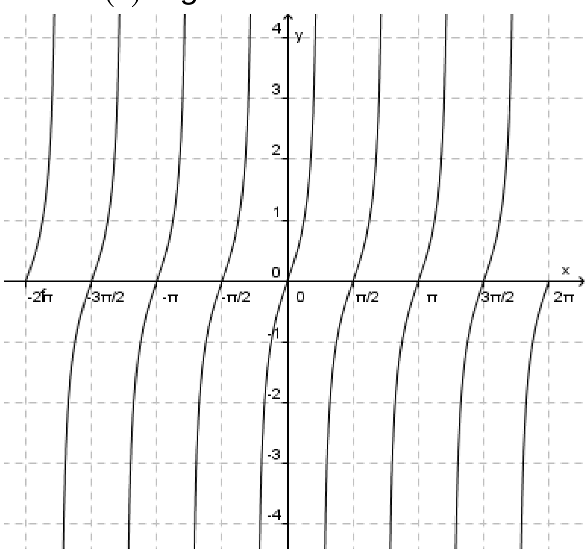
Nos três primeiros modelos, o domínio será limitado ao intervalo entre -2π e 2π compare o que acontece neste intervalo.

Exemplos

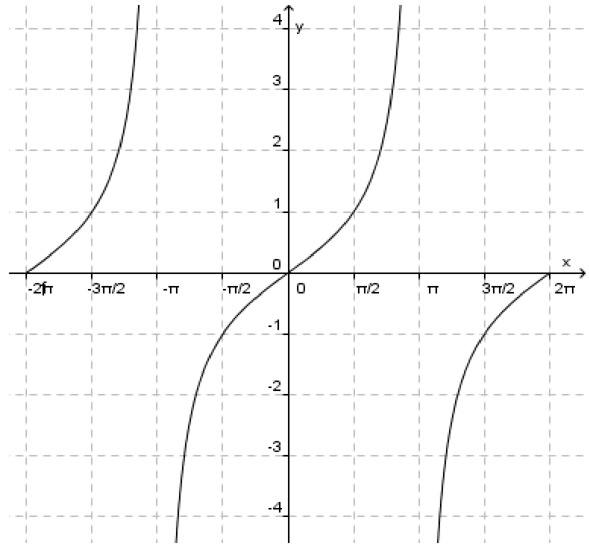
Ex.1: $f(x) = tg\,x$



Ex.2: $f(x) = tg\,2x$



Ex.3: $f(x) = tg\,\dfrac{x}{2}$

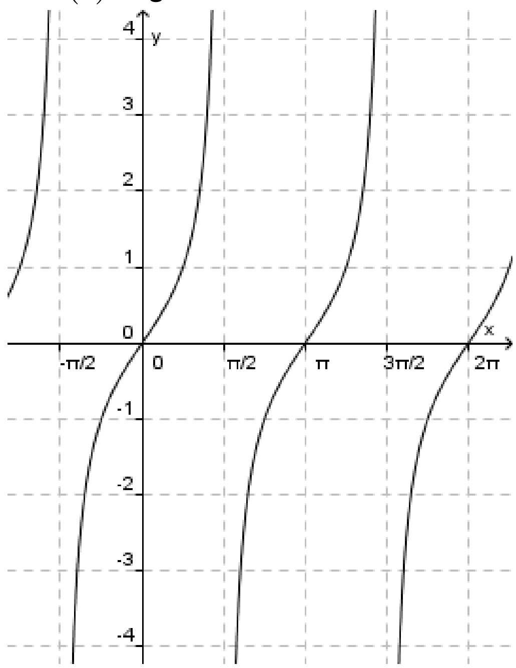


Como pode-se verificar, no primeiro exemplo, o argumento da função tangente é x e o período é π. No segundo exemplo, o argumento x está multiplicado por 2 e o período é $\dfrac{\pi}{2}$. Já no terceiro exemplo, o argumento está dividido por 3 e o período é 2π.

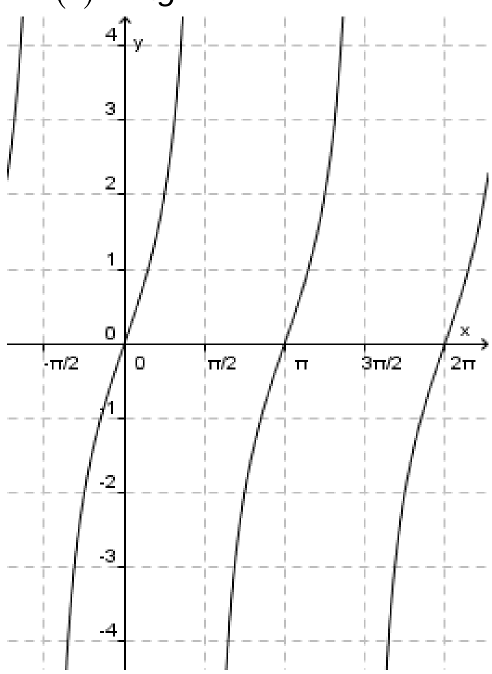
Note, nos três próximo exemplos, o que acontece quando multiplicamos ou dividimos a função tangente por um número real.

Exemplos

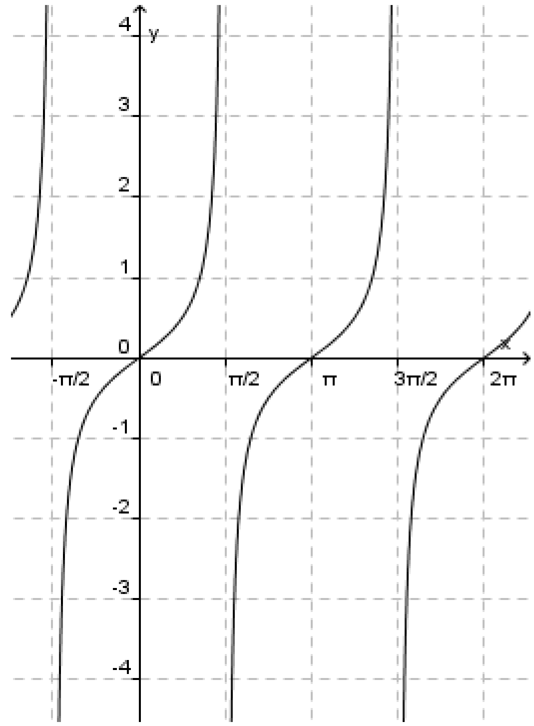
Ex.1: $f(x) = tg\, x$



Ex.2: $f(x) = 2\, tg\, x$



Ex.3: $f(x) = \frac{1}{2} tg\, x$



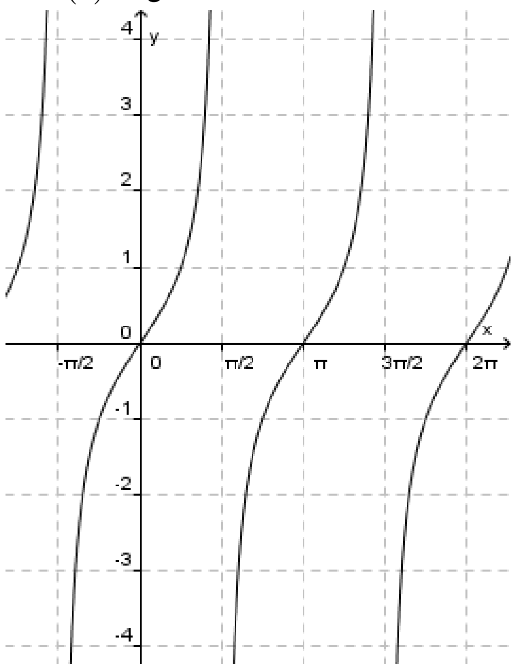
Como já havia sido dito, uma constante multiplicando a função apenas causa um efeito de "esticar" ou "encolher" o gráfico da função tangente.

Como a imagem da função tangente é formada por todos os números reais, este parâmetro não altera a imagem da função.

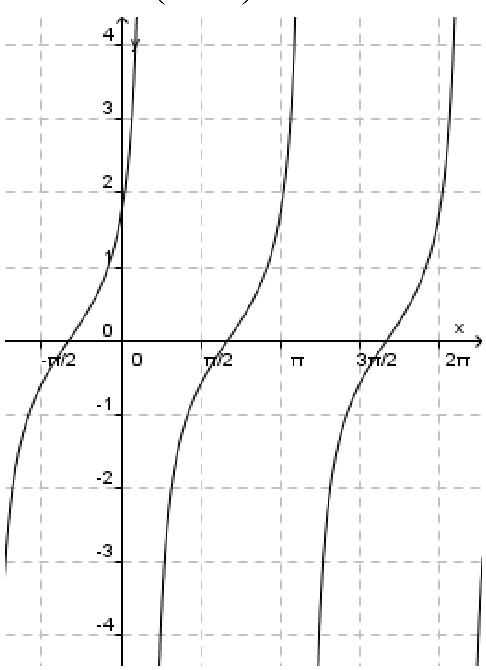
Vamos, agora, aplicar um fator de defasagem e ver seu efeito sobre o gráfico. Veja nos três próximos exemplos.

Exemplos

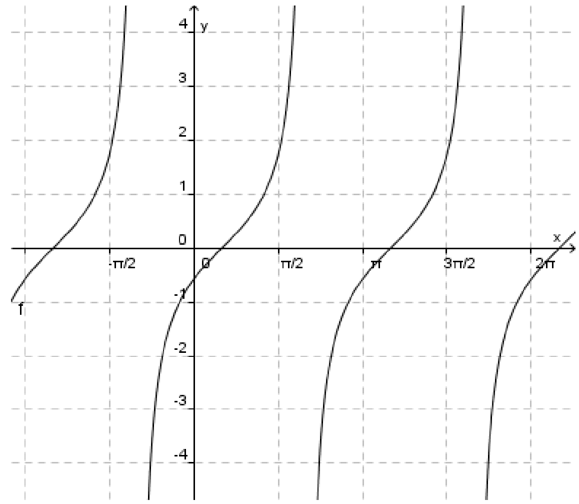
Ex.1: $f(x) = tg\,x$



Ex.2: $f(x) = tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



Ex.3 $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$



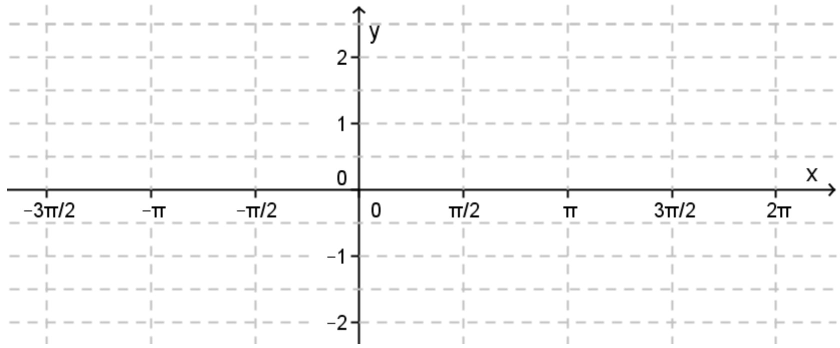
Neste grupo de gráficos, é possível observar o deslocamento horizontal do gráfico da função.

O período não muda mas o domínio é alterado em cada caso. Para determinar o domínio, é importante notar que o argumento da função tangente deve ser diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

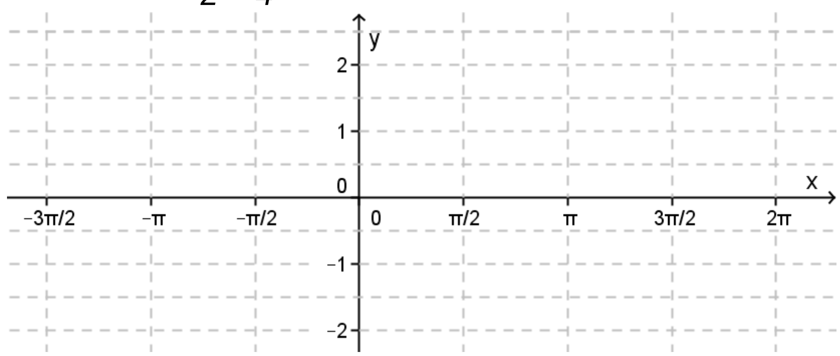
Vamos, agora, construir dois gráficos e resolver outros exercícios.

Exercícios

40) Construa o gráfico e determine o domínio da função $f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



41) Construa o gráfico da função $f(x) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$.



42) Qual o domínio da função

a) $f(x) = tg\,2x$?

b) $f(x) = tg\,3x$

c) $f(x) = tg\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

43) Qual o sinal da expressão

a) $tg\,269^o + tg\,178^o$?

b) $tg\frac{12\pi}{7} \cdot \left(\text{sen}\frac{5\pi}{11} + cos\frac{23\pi}{12}\right)$

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam f(x) e g(x) duas funções trigonométricas com domínios D_f e D_g. Resolver a equação trigonométrica f(x) = g(x) significa determinar o conjunto de valores de x que tornam a igualdade verdadeira.

Para resolver as equações trigonométricas que veremos nesta apostila, devemos sempre procurar reduzi-las a expressões do tipo:

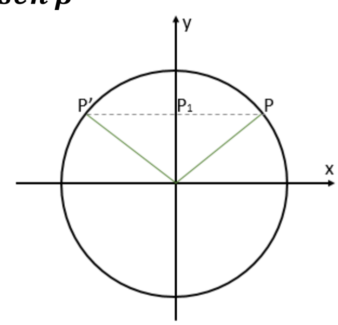
a) $sen\ \alpha = sen\ \beta$; ou

b) $cos\ \alpha = cos\ \beta$; ou

c) $tg\ \alpha = tg\ \beta$.

Estas expressões são denominadas Equações elementares.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TIPO $\boldsymbol{sen\ \alpha = sen\ \beta}$



Se $sen\ \alpha = sen\ \beta = OP_1$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre uma reta perpendicular ao eixo dos senos passando pelo ponto P_1. No caso da figura, estão nos pontos P e P'.

Assim, se $sen\ \alpha = sen\ \beta = OP_1$, temos duas possibilidades:

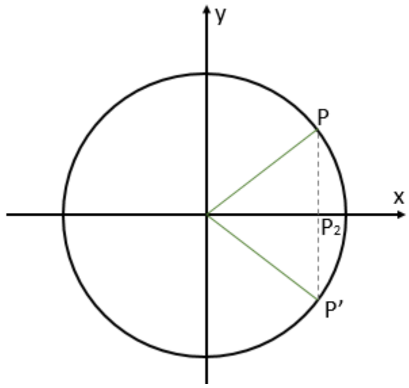
I) α e β tem a mesma imagem; ou

II) α e β tem imagens simétricas em relação ao eixo vertical.

Então, de forma geral, podemos afirmar que:

$$sen\ \alpha = sen\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TIPO $\boldsymbol{cos\ \alpha = cos\ \beta}$



Se $cos\ \alpha = cos\ \beta = OP_{21}$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre uma reta perpendicular ao eixo dos senos passando pelo ponto P_2. No caso da figura, estão nos pontos P e P'.

Assim, se $cos\ \alpha = cos\ \beta = OP_2$, temos duas possibilidades:

I) α e β tem a mesma imagem; ou

II) α e β tem imagens simétricas em relação ao eixo horizontal.

Então, de forma geral, podemos afirmar que:

$$cos\ \alpha = cos\ \beta\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

A seguir, veremos 9 exemplos de equações trigonométricas, todas envolvendo SENO no entanto, a resolução de equações envolvendo COSSENO é similar.

Exemplos

Em cada exemplo, resolver a equação:

Ex.1: $sen\ x = sen\ \frac{\pi}{5}$

Resolução:

$$sen\ x = sen\ \frac{\pi}{5}\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi\right\}$$

Ex.2: $sen\ x = \frac{1}{2}$?

Resolução:

Neste caso, observando o Ciclo Trigonométrico, vemos que os arcos da primeira volta cujo seno vale $\frac{1}{2}$ *são* $\frac{\pi}{6}$ *e* $\frac{5\pi}{6}$, *assim:*

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

Ex.3 $sen\ x = 1$

Resolução:

$sen\frac{\pi}{2} = 1$, assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

Ex.4: $sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Na primeira volta, $x = \frac{5\pi}{4}$ *ou* $x = \frac{7\pi}{4}$, *assim:*

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

Ex.5: $sen\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Resolução:

Na primeira volta:

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} \longrightarrow x = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = \frac{11\pi}{12}$ *ou*

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} \longrightarrow x = \frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = \frac{19\pi}{12}$

assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi\right\}$$

Ex.6: $sen^2x = \frac{1}{4}$

Resolução:

$sen\ x = \pm\frac{1}{2}$

Na primeira, os arcos que possuem seno igual a $\pm\frac{1}{2}$ *são* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ *e* $\frac{11\pi}{6}$, assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \right.$$
$$\left. x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ \ ou\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

Ex.7: $sen^2x = sen\ x$

Resolução:

$$sen^2x = sen\ x$$
$$sen^2x - sen\ x = 0$$
$$sen\ x\ (sen\ x - 1) = 0$$

Então

$$sen\ x = 0 \text{ ou } sen\ x - 1 = 0$$

$sen\ x = 0$

Na primeira volta, $x = 0$ ou $x = \pi$

$sen\ x - 1 = 0 \longrightarrow sen\ x = 1$

Na primeira volta, $x = \frac{\pi}{2}$

Assim:

$$S = \{x \in \mathbb{R}\ |\ x = 2k\pi, x = \pi + 2k\pi$$
$$\left. ou\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

Obs.: as duas primeiras soluções se diferenciam por meia volta, assim podemos reescrever esta solução como:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}\ |\ x = k\pi\ ou\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

Ex.8: $cos^2x = 1 + sen\ x$

Resolução:

Uma das relações trigonométricas que estudamos dizia que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, então vamos substituir cos^2x por $1 - sen^2\ x$.

Desta forma, podemos escrever:

$$cos^2x = 1 + sen\ x$$
$$1 - sen^2x = 1 + sen\ x$$
$$-\ sen^2x = sen\ x$$
$$sen^2x = sen\ x$$

Este é exatamente o exemplo 7. A partir daqui, a resolução segue como lá.

Ex.9: $sen\ 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Na primeira volta, os arcos que possuem seno $\frac{\sqrt{2}}{2}$ são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, assim:

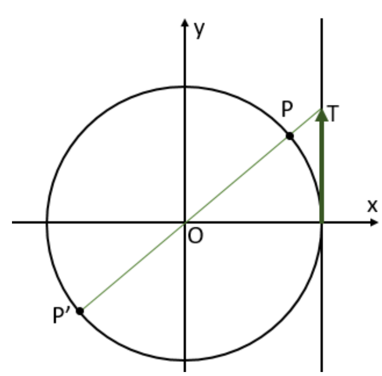
$$3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ \longrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

ou

$$3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}\ |\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right.$$
$$\left. ou\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right\}$$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TIPO $tg\ \alpha = tg\ \beta$



Se $tg\ \alpha = tg\ \beta = \overline{OT}$, então as imagens de α e β estão sobre uma mesma reta determinada por O e por T em P e P’ assim, existem duas possibilidades:

I) α e β tem a mesma imagem; ou

II) α e β tem imagens simétricas em relação ao centro do ciclo trigonométrico.

Então, de forma geral, podemos afirmar que:

$$tg\ \alpha = tg\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$$

Mas estas duas situações podem ser resumidas em uma única uma vez que a defasagem entre elas é de meia volta e podemos resumir que:

$$tg\ \alpha = tg\ \beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos

Resolver as equações trigonométricas em cada caso:

Ex.1: $tg\ x = 1$

Resolução:

Na primeira meia volta, o arco cuja tangente vale 1 é $x = \frac{\pi}{4}$.

Assim,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

Ex.2: $tg\ \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolução:

Na primeira meia volta, o arco cuja tangente vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$ é $\frac{\pi}{6}$.

Então $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$

Assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$$

Ex.3: $tg\ 2x = \sqrt{3}$

Resolução:

Na primeira meia volta, o arco cuja tangente vale $\sqrt{3}$ é $\frac{\pi}{3}$.

Então $2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \right\}$$

Exercícios

44) Resolver as equações trigonométricas a seguir:

a) $cos\ x = cos\ \frac{\pi}{5}$

b) $cos\ x = \frac{1}{2}$

c) $cos\ x = 1$

d) $cos\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

f) $cos^2 x = \frac{1}{4}$

g) $cos^2 x = cos\ x$

h) $sen^2 x = 1 + cos\ x$

i) $cos\ 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

45) Resolver as seguintes equações:
a) $cos\ 3x - cos\ x = 0$

b) $sen\ 5x = sen\ \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

46) Determinar os ângulos internos de uma triângulo ABC sabendo que $cos\ (A + B) = \frac{1}{2}$ e $sen\ (B + C) = \frac{1}{2}$.

47) Resolver as equações abaixo:
a) $tg\ x = tg\ \frac{\pi}{5}$

b) $3 \cdot tg\ x = \sqrt{3}$

c) $tg\ 4x = 1$

d) $tg^2 2x = 3$

48) Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $2 \cdot sen\ x = 1$.

49) Resolver a equação

$$3sen\ x - \sqrt{3} \cdot cos\ x = 0$$

RESPOSTAS

01)

x		sen x
grau	radiano	
0	0	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
180	π	0
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
360	2π	0

02) 0

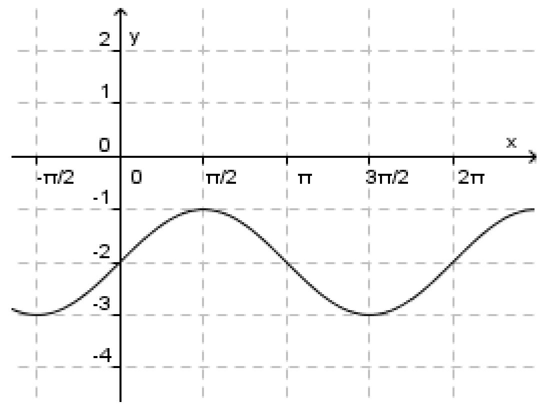
03) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

04) $-\sqrt{6}$

05) a) negativo
b) positivo ou nulo
c) positivo

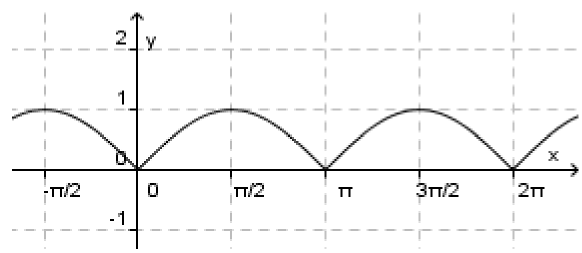
06) a) primeiro ou quarto
b) segundo ou terceiro
c) Não existe a pois $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$

07)



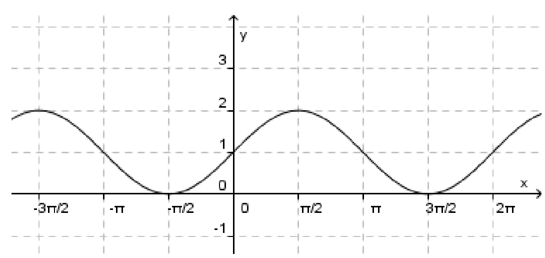
D = $\mathbb{R}$ e Im = [-3; -1]

08)



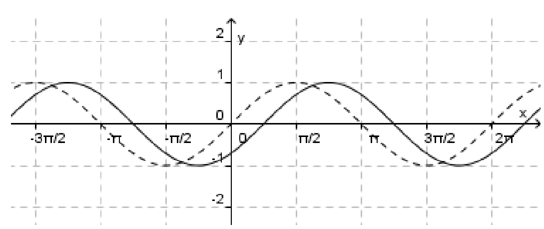
D = $\mathbb{R}$ e Im = [0; 1]

09)



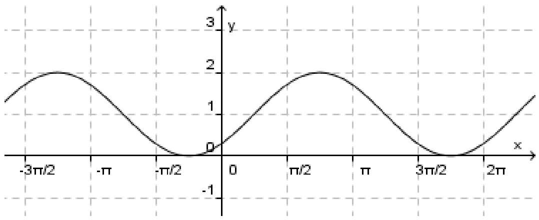
D = $\mathbb{R}$ e Im [0; 2]

10)



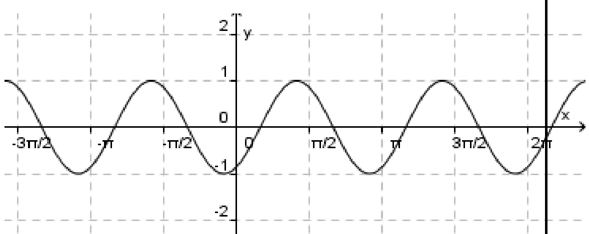
D = ℝ e Im [-1; 1]

11)



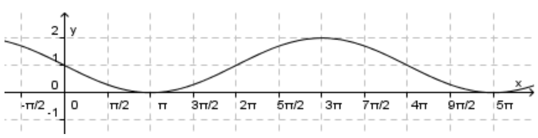
D = ℝ e Im [0; 2]

12)



D = ℝ e Im [-1; 1]

13)



D = ℝ e Im [0; 2]

14) $2 \leq m \leq 3$

15) $m \leq \frac{3}{2}$

16)	x	COS X
grau	radiano	
0	0	1
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
180	π	-1
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	0
300	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
360	2π	1

17) -1

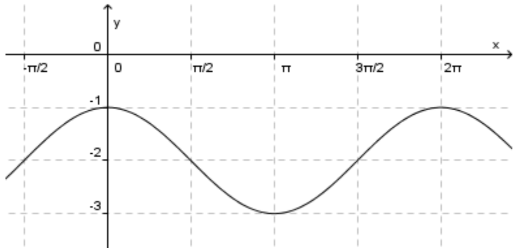
18) $-\frac{1}{2}$

19) $-\sqrt{2}$

20) a) Positivo ou nulo
b) Positivo
c) nulo

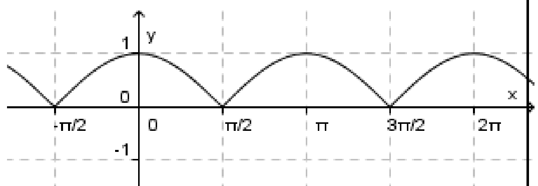
21) a) segundo ou terceiro
b) primeiro ou quarto
c) Não existe a pois $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

22)



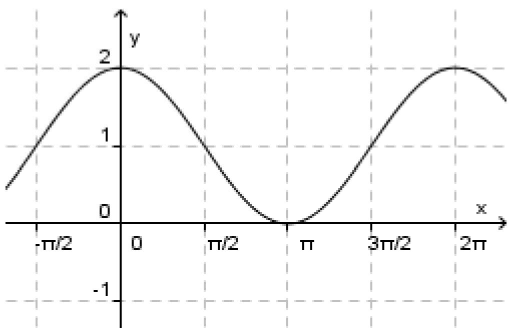
D = ℝ e Im = [-3; -1]

23)



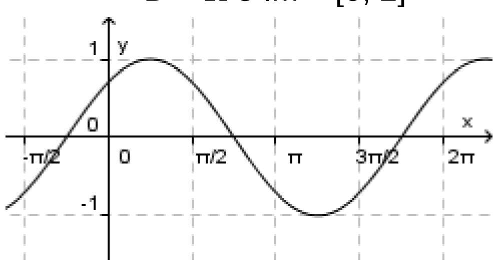
D = ℝ e Im = [0; 1]

24)



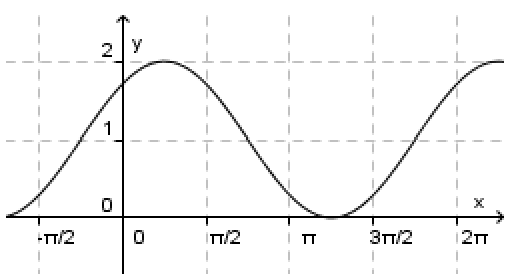
D = ℝ e Im = [0; 2]

25)



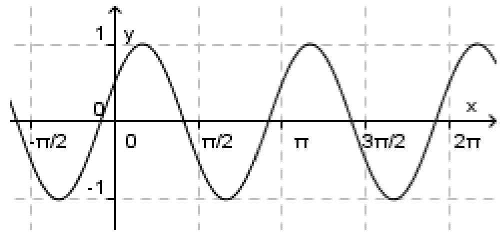
D = ℝ e Im = [-1; 1]

26)



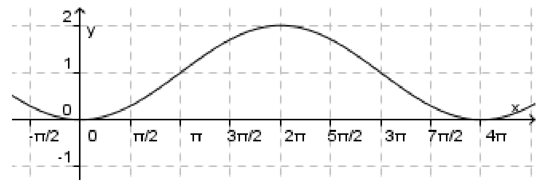
D = ℝ e Im = [0; 2]

27)



D = ℝ e Im = [-1; 1]

28)



D = ℝ e Im = [0; 2]

29) Sim, pois $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

30) $2 \le m \le 3$

31) $m \le \frac{3}{2}$

32)

x: grau	x: radiano	*tg* x
0	0	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	∄ ou +∞
120	$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180	π	0

210	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$ ou $-\infty$
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360	2π	0

33) 0

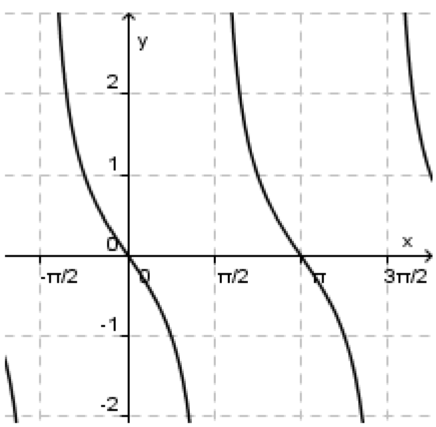
34) -1

35) 3

36) a) negativo
b) nulo
c) nulo

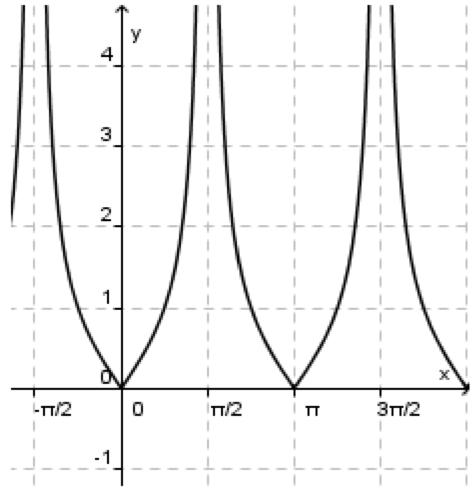
37) a) I ou III
b) II ou IV
c) I ou III

38)



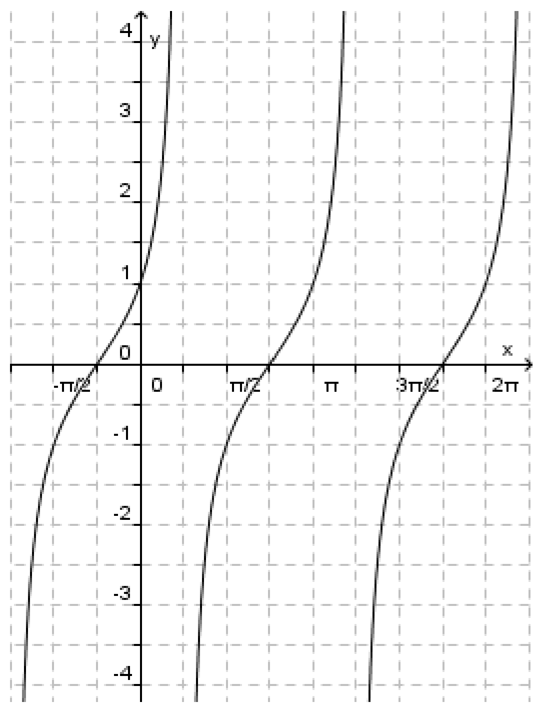
$D = \Re - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ,} k \in Z \right\}$ e $Im = \Re$

39)



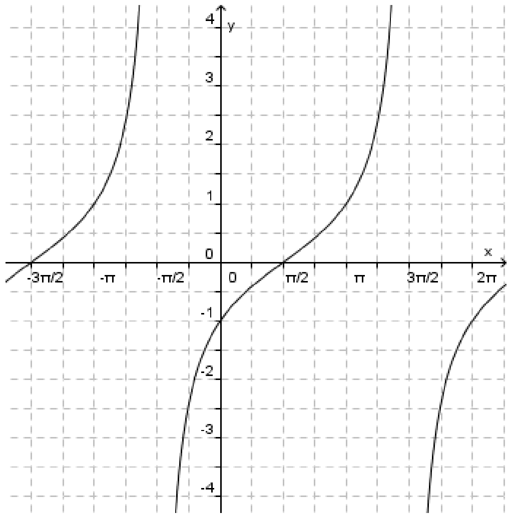
$D = \Re - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ e $Im = \Re^{+}$

40)



$D = \Re - \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ,} k \in Z \right\}$

41)



$$D = \Re - \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ , } k \in Z \right\}$$

42)

a) $D = \Re - \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ , } k \in Z \right\}$

b) $D = \Re - \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \text{ , } k \in Z \right\}$

c) $D = \Re - \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \text{ , } k \in Z \right\}$

43) a) positiva
b) negativa

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANTE, Luiz Roberto; Matemática, Volume único. São Paulo, Atica, 2005.

IEZZI, Gelson e outros; Matemática, Volume único. São Paulo, Atual, 2002.

IEZZI, Gelson e outros; Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1. São Paulo, Atual, 5ª edição, 1977.

PAIVA, Manoel; Matemática; Volume 1. São Paulo, Moderna, 1995.