ANÁLISE DE SISTEMAS DE LINEARES
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Aula 3 – Determinantes

Introdução

A função que associa um numero a uma matriz quadrada hoje é conhecida como determinante, foi inicialmente esboçado pelos Chineses 250 A.C. para resolver pequenos problemas de equações lineares, posteriormente o assunto foi retomado no Japão por Seki Kowa (1642-1708) e na Europa por G. W. Leibniz (1646-1716). Mas só com o A.L.Cauchy(1789-1857) que o assunto foi devidamente formalizado.. O estudo do determinante foi um tópico importante no desenvolvimento da matemática, porém não é um método tão eficiente para resolver equações lineares com grande numero de variáveis como é o método de eliminação de C.F. Gauss((1777-1855). Mesmo assim, o determinante fornece informações importantes sobre as matrizes. O próprio nome Matriz, dado por J.J. Sylvester (1814-1897) para o arrancho de números na forma de linhas e colunas deve-se ao determinante, como pode ser verificado com as próprias palavras de Sylvester,

"...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..." (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pag 363-370).

Permutação

Uma permutação do conjunto de inteiros {1,2, ... , n} é um rearranjo destes inteiros em alguma ordem sem omissões ou repetições.

Verificar que dado um conjunto de inteiros {1,2, ... , n} a quantidade de permutações permitidas é dada por n! ou seja

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \tag{3.1}$$

Exemplo: Para o conjunto de números inteiros {1,2,3} existem seis permutações pois

$$n! = 3(3-1)(3-2) = 6$$

e as permutações possíveis são

$$\begin{matrix} (1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) \end{matrix}$$

Ocorre uma inversão numa permutação sempre que um inteiro maior precede um menor, para o exemplo dado (2,1,3) tem uma inversão e (3,2,1) tem três inversões pois:

Primeira inversão: (3,2,1) → (3,1,2)

Segunda inversão: (3,1,2) → (1,3,2)

Terceira inversão: (1,3,2) → (1,2,3)

Quantas inversões tem as permutações?

i. (.6,1,3,4,5,2)
ii. (2,4,1,3)
iii.. (1,2,3,4)

O sinal da permutação, σ(p), é definido em função da paridade do numero de inversões necessárias para a permutação, p, voltar a forma original ordenada, i.e.

$$\sigma(p) = \begin{cases} +1 & \text{se p retorna a ordem natural depois de um numero par de inversões} \\ -1 & \text{se p retorna a ordem natural depois de um numero impar de inversões} \end{cases} \quad (3.2)$$

Determinante

Definição de Determinante
Para uma matriz de dimensão *n* x *n*,, $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, o **determinante** de A é definido como sendo o numero escalar $$\det(A) = \sum_{p} \sigma(p)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (3.3)$$ onde σ(p) representa o sinal da permutação e p = (p_1, p_2,…, p_n) uma permutação da seqüência de números inteiros ordenados = (1 2,…, n.). • Determinante de uma matriz não quadrada não é definido. • O determinante da matriz A é notado como det(A) ou |A|.

Observe que cada termo $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ de (3.3) representa a multiplicação de um elemento de cada linha e com posicionamento em colunas diferentes da matriz A. Sendo que o somatório resulta em todas as combinações de permutação entre os elementos da matriz.

Exemplo: Seja matriz de dimensão *2* x *2*,,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Existem 2! = 2 permutações de (1,2), especificamente {(1,2) (2,1)}, logo o det(A) contem dois termos

$$\sum_p \sigma(p)a_{1p_1}a_{2p_2} = \sigma(1,2)a_{11}a_{22} + \sigma(2,1)a_{12}a_{21}$$

Como a permutação (1,2) é par (não tem inversões) e a permutação (2,1) é impar (tem uma inversão) verifica-se usando (3.2) que

$$\sigma(1,2) = +1 \quad \text{e} \quad \sigma(2,1) = -1$$

Substituindo os sinais da permutação obtém-se a formula de determinante para matrizes 2x2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} \tag{3.4}$$

Deduza a partir da definição (3.3) as formulas para o calculo do determinante das seguintes matrizes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{3.5}$$

Para as matrizes n x n, desenvolva primeiro com matrizes 3x3 e depois avalie para o caso genérico.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{3.6}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{3.7}$$

Propriedades do Determinante

A definição (3.3) pode ser empregada para determinar e comprovar algumas as propriedades do determinante.

Propriedades do Determinante

Sejam *A* matriz quadrada de dimensões *n* x *n e k* numero real,

- Se qualquer coluna ou linha de A tiver todos os elementos iguais a zero então det(A)=0.
- Se A têm duas linhas ou colunas iguais então det(A) = 0.
- $\det(A) = \det(A^T)$ (3.8)
- $\det(kA) = k^n \det(A)$ (3.9)
- Geralmente $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Considerando que B é uma matriz quadrada de mesmas dimensões que A, então:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (3.10)

Considerando que B é uma matriz qualquer e A e D são matrizes quadradas, então:

- $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$ (3.11)

Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, Verifique:

i. det(A+B) com det(A)+det(B)
ii. det(A+C) com det(A)+det(C)
iii. det(AB) com det(A)det(B)
iv. det(AC) com det(A)det(C)

Operações elementares com Linhas

Sejam A e *B* matrizes quadradas de dimensões *n* x *n,* onde B e obtida a partir da aplicação de operações elementares com linhas sobre a matriz A, tem-se que

- Se a operação elementar for do tipo "Troca da i-ésima linha com a j-ésima linha" então

$$\det(B) = -\det(A) \quad (3.12)$$

- Se a operação elementar for do tipo "Multiplicação de uma linha por $\alpha \neq 0$" então

$$\det(B) = \alpha \det(A) \quad (3.13)$$

- Se a operação elementar for do tipo Substituição da *j-esima* linha pela combinação dela própria adicionada a uma linha múltipla da *i-ésima* então

$$\det(B) = \det(A) \quad (3.14)$$

A propriedade $\det(A) = \det(A^T)$,mostra que não é necessário distinguir linha ou coluna quanto se discute propriedades do determinante, logo os efeitos verificados com as operações elementares com linhas também são validos nas operações elementares com colunas.

O determinante é uma função que relaciona uma matriz quadrada com um numero. Para matrizes de pequena dimensão o uso da definição (3.3) é suficiente para realizar o calculo do determinante. Porém quando a complexidade do problema envolve matrizes de grande dimensão, o calculo do determinante usando a definição pode ser tedioso e inviável de ser realizado. Por exemplo, para calcular o determinante de uma matriz 25 x 25 envolveria 25! Permutações, ou seja, em torno de 10^{25} operações. Um método simples de evitar o trabalho do calculo do determinante a partir da definição é empregar as operações elementares de linhas (ou colunas) para transformar a matriz original numa matriz triangular superior. O calculo do determinante na forma triangular pode ser realizado diretamente por (3.7). Sempre é possível reescrever a matriz na forma triangular superior empregando operações elementares de linhas através de substituições e trocas de linhas (ou colunas), então conforme as propriedades de operações com linhas (ou colunas), sabe-se que a relação entre o determinante da matriz A original e o determinante da matriz B reescrita na forma triangular é

$$\det(B) = (-1)^r \det(A) \tag{3.15}$$

onde r é o numero de trocas de linhas(ou colunas) efetuadas para obter a forma triangular.

Aplicando a propriedade $\det(A) = \det(A^T)$ é possível estender o método para a forma triangular inferior. Pode ser mostrado que o calculo de um determinante de uma matriz de dimensão n x n, usando operações elementares requer cerca de $2n^3/3$ operações aritméticas. Para o exemplo citado de uma matriz 25 x 25 são necessárias em torno de 10^4 operações no lugar das 10^{25} operações necessárias com o uso da definição (3.3).

Calcule os determinantes das matrizes usando as operações elementares de linhas:

i. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

A redução de uma matriz quadrada a forma triangular superior (ou inferior) usando operações elementares também é útil como método para identificar seu posto *(rank)* e sua singularidade. A Figura 1 mostra duas matrizes quadradas A e B, onde $*$ representa números sem qualquer restrição, $\bullet$ representa números com valores distintos de zero e 0 representa números com valor zero.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \bullet & * & \dots & * & * \\ 0 & \bullet & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bullet & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet \end{bmatrix}$$

Fig. 1:Redução de uma matriz A a forma triangular superior B.

Suponha que a matriz A tenha sido transformada para uma forma triangular superior B empregando operações elementares de linhas através de substituições e trocas de linhas (ou colunas), então empregando (3.15) pode calcular indiretamente o determinante da matriz A através do determinante da matriz B.

Calculando o determinante da matriz B usando (3.7) verifica-se que det(B) $\neq$ 0 pois todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero. Conseqüentemente a matriz A também tem det(A) $\neq$ 0. Alem disso, verifica-se que na matriz B é não-singular, pois não há nenhuma possibilidade de uma linha seja combinação linear de outra e, portanto o rank(B) é completo. Como as operações elementares não modificam o rank da matriz conclui-se que A: tem rank completo, é uma matriz não singular e tem determinante diferente de zero.

Na Figura 2 a forma triangular superior resultante possui pelo menos um elemento nulo na diagonal superior. Neste caso, o determinante da matriz B é nulo e conseqüentemente também é nulo o determinante da matriz A. O rank de B não é completo, pois necessariamente existem linhas que são combinações lineares de outras. Neste caso a matriz original A tem rank incompleto, é uma matriz singular e tem determinante igual a zero.

$$B = \begin{bmatrix} \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & \bullet & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet \end{bmatrix}$$

Fig. 2: Forma triangular superior com um elemento nulo na diagonal principal.

No caso apresentado pela Figura 2, é possível calcular o rank da matriz B e conseqüentemente o rank da matriz A original avaliando o numero de elementos nulos presentes na diagonal principal, i.e.

$$\mathrm{rank(B) = n - d} \tag{3.16}$$

onde n representa a dimensão da matriz quadrada B e d representa o numero de zeros da diagonal principal.

Singularidade e Determinantes
Considerando que A seja uma matriz quadrada de dimensões *n* x *n,* Se det(A) $\neq$ 0 são afirmações equivalentes dizer que a matriz A: • É **não singular**; • Existe A^{-1} e $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ (3.17) • Tem **rank completo** igual a n; • Todas as linhas e colunas de A são linearmente independentes. Se det(A) = 0 são afirmações equivalentes dizer que a matriz A: • É **singular**; • Não existe A^{-1}; • Tem **rank incompleto** menor que n; • Existem linhas ou colunas de A que são linearmente dependentes**.**

No processamento computacional, pode-se encontrar, ocasionalmente, uma matriz **quase singular** ou **malcondicionada** - uma matriz que pode se tornar singular se algum elemento for alterado ligeiramente. Nesse caso, a diagonal principal da matriz na forma triangular pode apresentar algum elemento nulo devido a erro de arredondamento. Uma matriz quadrada é chamada de **singular** se e somente se seu determinante é zero, caso contrario a matriz é chamada de **não-singular**. Entretanto é falso afirmar que uma matriz com determinante próximo de zero tende a ser malcondicionada. Também é falso afirmar que uma matriz com determinante diferente de zero não tente a ser malcondicionada. Vamos aos exemplos:

A matriz $A = \begin{bmatrix} \mathrm{n} & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$ é malcondicionada, pois a segunda linha tente a zero quando o valor de n aumenta, entretanto det(A)=1.

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1/\mathrm{n} & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$ não é malcondicionada mesmo quando o valor de n aumenta e o determinante, $\det(A) = \frac{1}{n^2}$, tente a zero, pois a matriz pode ser reescrita como $A = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que não é uma matriz singular.

Avalie numericamente qual o valor de n usado para que as nas matrizes A e B não sejam consideradas malcondicionadas. Considere que todas as operações são realizadas com truncamento em 2 casas decimais (exemplo: 2/3 = 0.66)

i. $A = \begin{bmatrix} \mathrm{n} & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$

ii. $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1/\mathrm{n} & 0 \\ 0 & 1/\mathrm{n} \end{bmatrix}$

Solução de um Sistema de Equações Lineares na forma Ax = b
Se A é uma matriz quadrada com det(A) ≠ 0 , pode-se afirmar que: • Ax = 0, só tem solução trivial x =0; • Ax = b, tem exatamente uma única solução x para cada vetor coluna b.

Use determinante para encontrar os valores de α para que o sistema possua uma única solução

i. $\begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Expansão em Cofatores

Para se calcular o determinante de uma matriz pode-se empregar a definição (3.3) ou empregar o método das operações elementares de linhas (ou colunas) para transformar a matriz original numa matriz triangular superior (ou inferior). Outra maneira de calcular o determinante é chamada de Expansão em Cofatores[1]. Para analisar esse método, inicialmente será reproduzida a equação (3.5) que representa o determinante de uma matriz de dimensão 3 x 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Reescrevendo (3.5), de maneira arranjar seus termos em relação aos coeficientes da primeira linha, tem-se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \quad (3.18)$$

Em (3.18) pode-se verificar que cada elemento da primeira linha da matriz multiplica um produto de coeficientes das outras linhas e colunas da matriz. Além disso, esse produto é também um determinante de uma matriz de dimensão 2x2 formada exatamente pelas linhas e colunas que não pertencem ao elemento da primeira linha em questão, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Observe que o determinante da matriz A com dimensão 3x3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatrizes 2x2,

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) \quad (3.20)$$

Determinante **menor** de uma matriz
O determinante das submatrizes é chamado de determinante menor ou simplesmente **menor**, pois tem dimensão menor que a matriz a qual se deseja efetivamente calcular o determinante. O menor é definido como: • $M_{ij} = \det(A_{ij})$ (3.21) onde A_{ij} é a submatriz de A construída retirando-se a *i*-ésima linha e a *j*-ésima coluna.

Substituído (3.21) em (3.20) obtém-se uma nova maneira de calcular o determinante de uma matriz de dimensão 3 x 3 empregando determinantes menores de dimensão 2x2, i.e.

$$\det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \quad (3.22)$$

[1] Em 1772, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) apresentou a formulação da expansão em cofatores também conhecido como expansão de Laplace.

Para calcular determinantes de matrizes de dimensão n x n, recorre-se ao mesmo procedimento reduzindo o problema ao calculo de determinantes de matrizes de dimensão n – 1. Podemos, então, repetir o processo para essas matrizes (n-1) x (n-1) até obter matrizes 2 x 2.

Complemento Algébrico ou **Cofator**
Para facilitar o calculo do determinante de matrizes de ordem superior define-se o **cofator** para identificar as inversões de sinal dos coeficientes da linha ou coluna usada para realizar a expansão representarem permutações impares. Portanto o cofator ou complemento algébrico de de um coeficiente a_{ij} é dado por • $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ **(3.23)**

Substituído (3.23) em (3.22) e, tem-se:

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} \tag{3.24}$$

Calcule o determinante da Matriz A usando a expansão em cofatores em relação a primeira linha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Compare o resultado com o determinante calculado a partir de (3.5).

Na expansão em cofatores para o calculo do determinante foi utilizado a multiplicação dos coeficientes da primeira linha da matriz pelos seus cofatores e somando os produtos resultantes. Generalizando para uma matriz de dimensão n x n pode-se verificar que também é valido utilizar quarquer linha ou coluna para realizar a expansão, ou seja:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \tag{3.25}$$

Calcule o determinante da Matriz A usando a expansão em cofatores:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

i. Considerando os coeficientes da terceira linha;

ii. Considerando os coeficientes da segunda coluna.

Inversa de uma Matriz usado a Adjunta

Se A tem det(A) ≠ 0 e é uma matriz de dimensão n x n com dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e Δ_{ij} é o cofator de a_{ij} , então a matriz

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

é chamada de **matriz de cofatores** de A. A transposta desta matriz é chamada de Matriz adjunta de A e é denotada por adj(A)

$$\mathrm{adj(A)} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1\mathrm{n}} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{\mathrm{n}1} & \Delta_{\mathrm{n}2} & \cdots & \Delta_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.27}$$

O produto da **matriz adjunta** de A com a matriz A é dado por

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{adj(A)} = \mathrm{adj(A)} \cdot \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{I_n} \tag{3.28}$$

Logo, a matriz inversa de A pode ser calculada usando

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}\mathrm{adj(A)} \tag{3.29}$$

i. Empregando a matriz adjunta, determine uma equação genérica para calcular a matriz inversa de $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}$, considerando que a matriz A é não-singular.

ii. Calcule a matriz inversa de $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo: Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução: Com a matriz é de dimensão 3 x 3, existem 3! permutações possíveis logo deve-se calcular nove cofatores:

$$\Delta_{11} \quad \Delta_{12} \quad \Delta_{13} \quad \Delta_{21} \quad \Delta_{22} \quad \Delta_{23} \quad \Delta_{31} \quad \Delta_{32} \quad \Delta_{33}$$

Olhando para os índices dos cofatores verifica-se que 5 permutações são pares e portanto não há inversão de sinal.

$$\Delta_{11} \quad \Delta_{13} \quad \Delta_{22} \quad \Delta_{31} \quad \Delta_{33}$$

e nas 4 permutações impares aplica-se a inversão de sinal

$$\Delta_{12} \quad \Delta_{21} \quad \Delta_{23} \quad \Delta_{32}$$

ë claro que aplicando $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, a definição da inversão ou não aplicada aos determinantes menores é direta.

Os nove cofatores são

$$\Delta_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \quad \Delta_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14 \quad \Delta_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \quad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Logo a matriz de cofatores é

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 14 & -7 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

A matriz adjunta é a transposta da matriz de cofatores,

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

O calculo do det(A) é realizado aplicando a expansão em cofatores em uma linha ou em uma coluna da matriz A. Aplicando na primeira linha, tem-se:

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = 2\cdot(-2) + 1\cdot 3 + 3\cdot 5 = 14$$

Aplicando-se a expansão na terceira coluna, tem-se o mesmo resultado,

$$\det(A) = a_{13}\Delta_{13} + a_{23}\Delta_{23} + a_{33}\Delta_{33} = 3\cdot 5 + 1\cdot(-7) + (-2)\cdot(-3) = 14$$

A inversa da matriz A é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Para resolver um sistema de n equações com n incógnitas pode-se empregar o método de Gauss ou usar o método da matriz adjunta para calcular a inversa da matriz. Uma outra maneira, conhecida como regra de Cramer, foi formulada por G. Cramer (1704-1752)[2]. A regra é interessante para estudar como a solução de **Ax** = **b** se comporta quando as componentes de **b** variam. Entretanto a aplicação desta regra para sistemas de dimensão maior que 3, requer muito mais processamento que as outras técnicas estudadas.

Seja um sistema de n equações com n incógnitas, dado por

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \tag{3.30}$$

O sistema (3.30) pode ser rescrito na forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

ou

$$Ax = b \quad \text{onde:} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

[2] Embora a regra tenha seu nome, variações desta regra foram formuladas antes por vários matemáticos.

Para se aplicar a regra de Cramer define-se um novo conjunto de matrizes $A_i(b)$ obtidas a partir da substituído a coluna i da matriz A pelo vetor b.

$$\begin{array}{c} A_i(b) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \Uparrow \\ \text{Coluna i} \end{array} \qquad (3.32)$$

Solução sistemas de equações aplicando a Regra de Cramer

Se Ax = b é um sistema de n equações lineares com n incógnitas tal que det(A)≠0, então o sistema tem uma única solução. Esta solução é

$$x_1 = \frac{\det(A_1(b))}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_2(b))}{\det(A)} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\det(A_n(b))}{\det(A)} \qquad (3.33)$$

onde $A_i(b)$ é a matriz obtida de A trocando-se sua *i*-ésima coluna por b conforme (3.32).

Exemplo: Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 6_1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solução: Inicialmente são montadas as matrizes A e $A_i(b)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1(b) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2(b) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Depois de calcular os determinantes das matrizes, usa-se (3.33) para encontrar a solução, i.e.,

$$x_1 = \frac{\det(A_1(b))}{\det(A)} = \frac{-40}{44} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2(b))}{\det(A)} = \frac{72}{44} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3(b))}{\det(A)} = \frac{152}{44}$$

Para resolver um sistema de n equações lineares em n incógnitas pela regra de Cramer, é necessário calcular n+1 determinantes de matrizes n x n. Para sistemas com mais de três equações, a eliminação gaussiana é muito mais eficiente, pois somente requer a redução de uma matriz aumentada n x (n+1). No entanto, a regra de Cramer dá uma fórmula para a solução se o determinante da matriz de coeficientes é não-nulo.

Problemas Propostos

3.1) Determine x tal que

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

3.2) Encontre todos os valores de λ para os quais

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

3.3) Se det(A) = -4, determine det(B), det(C) e det(D), considerando que

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+4c_1 & b_2+4c_2 & b_3+4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

3.4) Mostre que $\det\left(A^T B^T\right) = \det(A)\det\left(B^T\right) = \det\left(A^T\right)\det(B)$

3.5) Use as operações elementares com linhas para avaliar o determinante conhecido como determinante de Vandermonde[3], é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

3.6) Encontre todos os valores de α para os quais a exista A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha-2 & 2 \\ \alpha-2 & \alpha+2 \end{bmatrix}$$

[3] Alexandre Théophile Vandermonte (1735-1796) geralmente é conhecido como o fundador da teoria de determinantes.

Bibliografia

[1] Meyer, C.D., Matrix Analysis and Applied Linear Álgebra, Society for Industrial and Applied Mathematics.
[2] Lay, D.C., Álgebra Linear e suas Aplicações, Livros Técnicos e Científicos – LTC Editora, Segunda Edição.
[3] Kolman, B., Introdução à Álgebra Linear com Aplicações, Prentice-Hall do Brasil, Sexta Edição.
[4] Howard, A. & Rorres, R., Álgebra Linear com Aplicações, Editora Bookman, Oitava Edição.
[5] Boldrini, J.L., Costa, S.I.R, Figueiredo, V.L., Wetzler, H.G., Álgebra Linear, Editora Harbra, Terceira Edição.